ČŠI | Česká školní inspekce

TIMSS 2023: Inspirace pro rozvoj matematických a přírodovědných dovedností na 1. stupni ZŠ

Část 2 – Práce s daty, text pro učitele

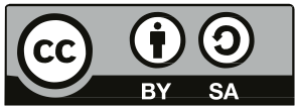
PhDr. Sylva Peclinovská, Ph.D.
doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.

Na přípravě výstupu se dále podíleli PhDr. Libor Klement, MBA, Vladislav Tomášek.

© Česká školní inspekce | Fráni Šrámka 37, 150 21 Praha 5
1. vydání | Vydala: Česká školní inspekce | 2026

Materiál je pod licencí Creative Commons CC BY-SA 4.0

Uveďte původ – zachovejte licenci 4.0 Mezinárodní



Hlavní zdroje použité při přípravě publikace:

Klement, L., Boudová, S., Janoušková, S., Tomášek, V. (2024). *Národní zpráva TIMSS 2023, 4. ročník*. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/cz/Dokumenty/Publikace-a-ostatni-vystupy/Narodni-zprava-TIMSS-2023-4-rocnik

Klement, L., Houfková, J., Mandíková, D., Blaško, M., Tomášek, V. (2026). *TIMSS 2023: Inspirace pro rozvoj matematických a přírodovědných dovedností na 1. stupni ZŠ, Část 1 - uvolněné úlohy*. Česká školní inspekce.

von Davier, M., Kennedy, A., Reynolds, K., Fishbein, B., Khorramdel, L., Aldrich, C., Bookbinder, A., Bezirhan, U., & Yin, L. (2024). *TIMSS 2023 International Results in Mathematics and Science*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. https://doi.org/10.6017/lse.tpisc.timss.rs6460

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2023 Copyright © 2025 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education and Human Development, Boston College.

Tato publikace byla vydána jako plánovaný výstup projektu Datově-analytická podpora pro hodnocení a řízení vzdělávací soustavy ČR (registrační číslo projektu: CZ.02.02.XX/00/22_005/0002901) spolufinancovaného Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

OBSAH

ÚVOD 5

Organizace textu a materiálů 5

Motivace volby tematického okruhu Statistika a pravděpodobnost 6

Zpráva ČŠI 6

Proč mají žáci získávat kompetence v práci s daty? 7

Základní typy organizačních principů souboru dat jsou: 8

A VYUŽITÍ ÚLOH PRO PEDAGOGICKÉ DIAGNOSTIKOVÁNÍ ŽÁKA NEBO TŘÍDY 12

Úloha 1 (ME61211A, ME61211B) 12

A priori analýza úlohy 13

Komplikující jevy při řešení úlohy pro žáky 15

Výsledky 16

Ukázky konkrétních žákovských řešení 17

Chyby v podúloze A 17

Chyby v podúloze B 20

Zajímavé jevy ze správných žákovských řešení 21

Úloha 2 (ME71135A, ME71135B) 22

A priori analýza úlohy 23

Komplikující jevy při řešení úlohy pro žáky 23

Výsledky 26

Ukázky konkrétních žákovských řešení 26

Úloha 3 (ME71201) 29

A priori analýza úlohy 29

Komplikující jevy při řešení úlohy pro žáky 31

Výsledky 38

Úloha 4 (ME71175A, ME71175B, ME71175C) 39

A priori analýza úlohy 40

Komplikující jevy při řešení úlohy pro žáky 40

Výsledky 41

Ukázky konkrétních žákovských řešení 41

B VYUŽITÍ ÚLOH VE VÝUCE PRO PLNĚNÍ OČEKÁVANÝCH VÝSLEDKŮ UČENÍ 46

Úvod 46

Metodické komentáře k pracovnímu sešitu Data kolem nás 46

Metodické doporučení k využití materiálů 47

Pracovní sešit jako portfolio pokroku žáka 48

Sebehodnocení žáků 48

1. kapitola LOV DAT – Sbíráme, zapisujeme a vyhodnocujeme data 50

Pracovní list 1 50

Pracovní list 2 51

2. kapitola DATOVÝ ÚKLID – Organizujeme data 52

Pracovní list 3 52
Pracovní list 4, 5 53
Pracovní list 6 54
Pracovní list 7 55
Pracovní list 8 56
3. kapitola ŘEČ DAT – Čteme a vyhodnocujeme data v různých zobrazeních 57
Pracovní list 9 57
Pracovní list 10 59
Pracovní list 11 59
Pracovní list 12 60
Pracovní list 13 60
Pracovní list 14 61
Pracovní list 15 62
Pracovní list 16 62
4. kapitola DATOVÁ UTKÁNÍ – Evidujeme a porovnáváme výkony, vyhodnocujeme výsledky 63
Pracovní list 17 63
Pracovní list 18 64
Pracovní list 19 64
Pracovní list 20 65
5. kapitola DATA VE SPOJENÍ – Porovnáváme data a hledáme mezi nimi souvislosti 66
Pracovní list 21 67
Pracovní list 22 68
Pracovní list 23 68
Pracovní list 24 69
6. kapitola DATOVÁ KAMUFLÁŽ – Odhalujeme zavádějící diagramy, grafy a tvrzení 71
Pracovní list 25 71
Pracovní list 26 72
Pracovní list 27 73
Pracovní list 28 74

ÚVOD

Výsledky mezinárodního šetření TIMSS, které v ČR zpracovává a zveřejňuje Česká školní inspekce, představují pro učitele mimořádně cenný zdroj informací nejen o výkonnosti žáků 4. ročníku ČR, ale také o tom, jakých chyb se žáci nejčastěji dopouštěli. Vzorek žáků je výjimečně rozsáhlý a díky pravidelnému čtyřletému cyklu a účasti desítek zemí výsledky v daném období umožňují smysluplné srovnání s předchozími lety, se sousedními státy, ale i celkově se světem, resp. se všemi státy, které se šetření zúčastnily. Každá použitá úloha byla posouzena mnoha odborníky, byla řešena několika tisíci žáků, a lze tedy očekávat, že výsledky poskytují spolehlivý obraz o silných a slabých stránkách našich žáků. Proto se domníváme, že uvolněné úlohy ze studií TIMSS je vhodné zařazovat do výuky matematiky ve 4. i v 5. ročníku. Učitelé je mohou využívat i jako nástroj pedagogického diagnostikování žáků své třídy a získat důkazy o jejich učení a obraz o míře zvládnutí probíraného učiva třídou.

Uvolněné úlohy z šetření TIMSS 2023**,** kterými se zde zabýváme, spadají do oblasti **práce s daty,** která podle revidovaného RVP ZV patří do nově formulovaného tematického celku Statistika a pravděpodobnost. Výsledky TIMSS poskytují různé přehledně zpracované statistické údaje, ale neposkytují konkrétní žákovská řešení. Proto jsme zadali stejné úlohy žákům ze 4. a 5. ročníku z různých škol (N = 41) a získali jsme tak v papírové podobě úplná řešení každé úlohy obohacená žákovskými komentáři o postupu. Prostřednictvím analýzy tohoto cenného materiálu jsme měli možnost nahlédnout do myšlení žáků, do jejich řešitelských postupů, porozumění úloze, chyb a miskoncepcí – část A. Na základě výsledků analýz jak samotných úloh, tak žákovských řešení jsme sestavili sadu úloh s pracovními listy a metodickými komentáři, které reagují na konkrétní problémy žáků a konkrétní jevy v zadání úloh – část B.

Organizace textu a materiálů

Možností, jak uvolněné úlohy ve výuce využít, je celá řada. Nabízíme zde dvě z nich. Jsou cíleny na 4. nebo 5. ročník 1. stupně ZŠ.

- **Využití úloh pro pedagogické diagnostikování žáka nebo třídy –** část A
- **Využití úloh ve výuce pro plnění očekávaných výsledků učení –** část B

Část A

se zabývá jak analýzou čtyř uvolněných úloh z šetření TIMSS 2023 z oblasti práce s daty, tak analýzou žákovských řešení daných úloh, čímž poskytuje východisko pro tvorbu materiálu B. Je tedy určena těm čtenářům, kteří chtějí hlouběji proniknout do problematiky úloh zaměřených na práci s daty, do myšlení žáků při řešení úloh daného typu a do možnosti využít nabízené úlohy jako nástroj vlastního pedagogického diagnostikování. Text vede čtenáře k zamýšlení se nad příčinami často se objevujících chyb v řešení žáků, nad žákovským porozuměním zadání úloh a v důsledku toho nad porozuměním způsobu řešení úloh vlastních žáků. K některým chybám, chybným strategiím, miskoncepcím nabízíme didaktické komentáře, jak s konkrétním žákem postupovat při jejich nápravě.

Část B

je převážně praktická. Jejím cílem je na základě zjištění vyplývajících z analýz čtyř uvolněných úloh z TIMSS 2023 z oblasti práce s daty v části A nabídnout učitelům odpovědi na otázky, jakým způsobem své žáky vést, kde je potřeba nějaké intervence či reedukace. Nabízíme zde podrobně zpracovaný učební materiál podporující rozvoj dovednosti žáků efektivně pracovat s daty, který:

- je pro učitele snadno dostupný a v podobě pracovních listů připravený k okamžitému použití ve výuce,
- je doplněn didaktickými komentáři, které propojují konkrétní aktivity s požadavky revidovaného RVP ZV a které upozorňují na úskalí jednotlivých úloh, poukazují na diagnostický potenciál úloh, na možnosti práce s chybou a možnosti diferenciace výuky,
- doporučuje vhodnou implementaci úloh ve výuce včetně námětů na organizaci výuky, na formulaci cílů dané úlohy, návrhů pomůcek, doplňujících otázek a aktivit,
- předkládá úlohy a aktivity v posloupnosti postupných kroků vedoucích k získávání vědomostí a dovedností potřebných k naplnění očekávaného výsledku učení (OVU): MAT-MAT-004-ZV5-009 **Získává data, graficky je zaznamenává, grafický záznam dat čte a interpretuje,** v tematickém okruhu: **Statistika a pravděpodobnost** v revidovaném RVP ZV.

Obě části jsou provázány vzájemnými odkazy, což čtenáři nabízí komplexnější vhled do celé problematiky. Čtenář si může vybrat, které části se chce či potřebuje věnovat a která z nich je pro něj v dané době aktuální. S oběma částmi lze tedy pracovat nezávisle na sobě a seznamovat se s nimi v libovolném pořadí.

Motivace volby tematického okruhu Statistika a pravděpodobnost

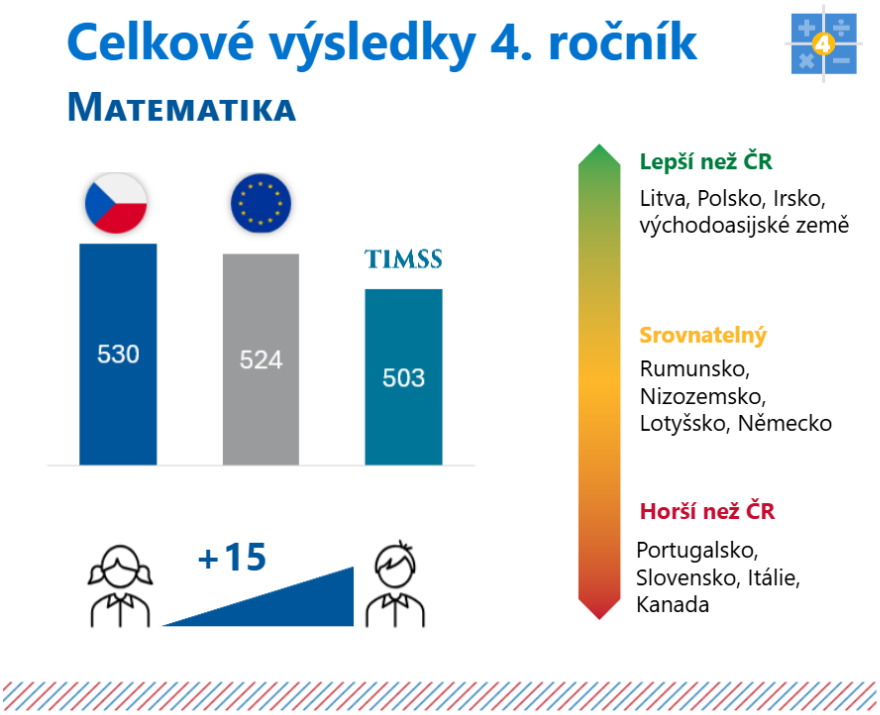
Důvodů, proč jsme vybrali pro tento text téma práce s daty, je několik:

- potřeba posílení tématu práce s daty v novém revidovaném RVP ZV,
- stále klesající úroveň výsledků českých žáků v oblasti data v TIMSS od roku 2015 – viz Národní zpráva TIMSS 2023: 4. ročník, oddíl 2.3.2,
- neuspokojivé výsledky konkrétních úloh z testování v r. 2019 a 2023 (viz Zpráva ČŠI níže),
- důležitost této oblasti pro rozvoj kreativity žáků,
- důležitost schopnosti žáků orientovat se v datech (datová gramotnost) pro běžný život.

Zpráva ČŠI

Národní zpráva ČŠI o výsledcích TIMSS 2023 uvádí, že ČR se podle průměrného výsledku řadí na 16. místo v pořadí všech zúčastněných zemí. Výsledek ČR se statisticky významně neliší od výsledku zemí počínaje Rumunskem až po Maďarsko. Na prvních šesti místech jsou země asijské a dalších devět jsou evropské (obrázek 1).

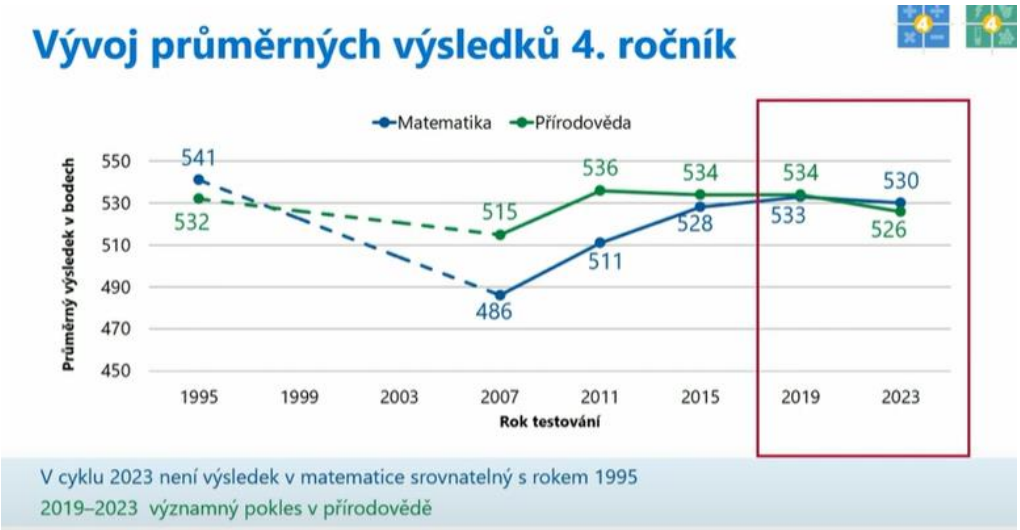
OBRÁZEK 1 | Celkové výsledky TIMSS 2023
[Převzato z: https://www.youtube.com/watch?v=dp04qAa4tQ8]



Země	Průměrný výsledek	Rozdíl vůči ČR
Singapur	615	▲
Tchaj-wan	607	▲
Korejská republika	594	▲
Hongkong (Čína)	594	▲
Japonsko	591	▲
Macao (Čína)	582	▲
Litva	561	▲
Turecko (5)	553	▲
Anglie	552	▲
Polsko	546	▲
Irsko	546	▲
Rumunsko	542	
Nizozemsko	537	
Lotyšsko	534	
Norsko (5)	531	
Česká republika	**530**	
Švédsko	530	
Bulharsko	530	
Finsko	529	
Austrálie	525	
Německo	524	
Dánsko	524	
Průměr zemí EU	**524**	▼
Srbsko	523	
Belgie (vlámská)	521	
Maďarsko	520	
Portugalsko	517	▼
USA	516	▼
Kypr	516	▼
Slovensko	515	▼
Slovinsko	514	▼
Itálie	513	▼
Arménie	513	▼
Albánie	512	▼
Kanada	504	▼
Mezinárodní průměr	503	▼
Španělsko	498	▼
...	...	...
Jihoafrická republika (5)	365	▼

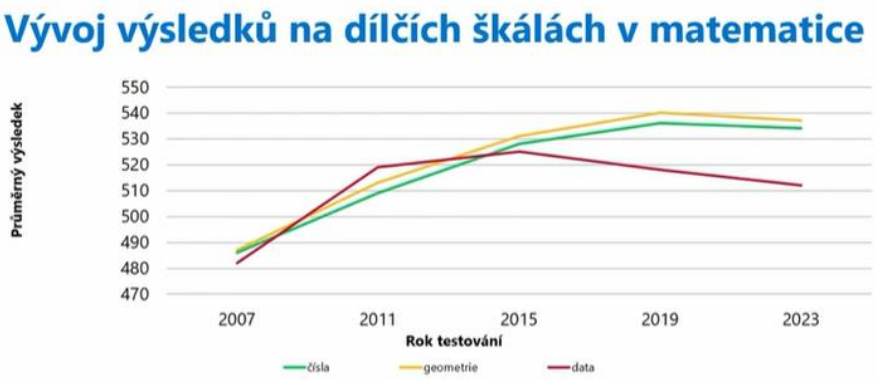
Tento výsledek je určitě potěšující, neboť se v průběhu let 2007–2019 zlepšoval. Potom však v období do roku 2023 došlo k mírnému poklesu z 533 bodů na 530, jak lze vyčíst ze spojnicového grafu na obrázku 2.

OBRÁZEK 2 | Vývoj výsledků žáků 4. ročníku



Na poklesu průměrného výsledku ČR se významně podílejí výsledky právě v oblasti data. V ní čeští žáci od r. 2015 trvale klesají a rozdíl mezi úspěšností v oblasti data a v dalších dvou oblastech – geometrie a čísla – se zvětšuje, jak je patrné z obrázku 3.

OBRÁZEK 3 | Vývoj výsledků na dílčích škálách



Uvedené výsledky tedy odhalují oblast Práce s daty jako kritické místo ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ u nás. Navíc nám dávají informaci, že posílení důrazu na práci s daty, s tabulkami, grafy, schématy a diagramy, a to nejen při výuce matematiky, je pro náš vzdělávací systém příležitostí přispět k rozvoji matematické gramotnosti žáků a také k větší úspěšnosti ČR v dalších cyklech šetření TIMSS.

Proč mají žáci získávat kompetence v práci s daty?

Schopnost člověka organizovat soubor dat patří k jeho důležitým kognitivním schopnostem a je založena na tvořivosti. Vhodná **organizace souboru dat** (objektů, situací, ale i procesů) data zpřehledňuje a umožňuje lepší orientaci v nich. Umožňuje snadněji vyhledávat potřebná data, najít vztahy mezi nimi, sledovat tendence, vyhodnocovat pravdivost interpretací dat apod.

Příkladem vhodné organizace dat mohou být slovníky, encyklopedie, jízdní řády, telefonní seznamy, rodokmeny, evidence občanů, uložení knih v knihovně, … Někdy jsou data organizována podle jednoho kritéria (například slovník, kde jsou slova uspořádána podle abecedního pořadí hesel), jindy podle dvou nebo i více kritérií (například seznam lidí v obci je uspořádán nejdříve podle abecedního pořadí jmen, dále pak podle data narození a podle bydliště).

Způsob, kterým soubor dat, událostí, jevů organizujeme, nazýváme **organizační princip** (OP). Pro volbu OP je určující cíl organizace, tedy k jakému účelu soubor dat organizujeme, jak a pro koho je budeme prezentovat, jaké informace potřebujeme získat.

Chvilka k zamyšlení

Vzpomeňte si, kdy jste se žáky pracovali s nějakými daty a jak. Vyskytly se při této práci nějaké situace, které vás překvapily? Vzpomenete si na nějakou úlohu, k jejímuž řešení bylo potřebné nějak uspořádat data?

Základní typy organizačních principů souboru dat jsou:

uspořádání

To je pravidlo, podle kterého lze soubor objektů uspořádat, tj. o každých dvou různých objektech souboru jednoznačně rozhodnout o jejich pořadí. Uspořádání splňuje pro každé tři objekty A, B, C souboru dat podmínku: je-li objekt A před B a zároveň objekt B před C, pak také objekt A je před C. Například žáky ve třídě je možné uspořádat podle abecedy pro účely evidence, podle velikosti, například při hodině tělocviku, podle data narození v nějaké soutěži, podle školního výkonu apod.

třídění

Je dán soubor objektů, soubor tříd (skupin objektů) a soubor kritérií, tj. rozhodovacích pravidel, podle nichž každý objekt z daného souboru lze zařadit právě do jedné z daných tříd. Například třídíme odpad (soubor objektů) do kontejnerů (třídy) sklo, plasty, papír, bioodpad, směsný odpad. Pravidla jsou: Je-li objekt ze skla, vložíme jej do kontejneru SKLO, apod. O třídění jde například i tehdy, když zaznamenáváme data do dvouparametrické tabulky, například zjišťujeme, kolik žáků z 5. A, 5. B a 5. C (vodorovné záhlaví tabulky) se věnuje nějakým sportům (svislé záhlaví tabulky).

klasifikace

Je podobná třídění, ovšem s tím rozdílem, že řešitel si sám stanovuje kritéria/pravidla, podle kterých tvoří skupiny objektů / třídy. Například máme rozdělit sadu mnohoúhelníků do několika skupin. Stanovíme si kritérium, že do jedné skupiny zařadíme všechny mnohoúhelníky se stejným počtem vrcholů. Tak vytvoříme třídu trojúhelníků, čtyřúhelníků, pětiúhelníků atd. Nebo například učitel klasifikuje písemné práce žáků. To znamená, že si nejdříve stanoví kritéria pro jednotlivé známky 1, 2, …, a každou práci oznámkuje. Tím vytvořil skupiny prací, které vykazují stejné znaky, např. typy a množství chyb, a jedna skupina (třída) je označena známkou 1, další skupina známkou 2 atd.

Další organizační principy jsou:

- **hierarchizace** (např. organizace armády, rodokmen),
- **distribuce** čili rozdělování (např. čísla 12, 63, 38, 25, 70, 51 rozděl do tří košů tak, aby v každém byla dvě čísla se součtem menším než 100),
- **schematizace** (např. Autoatlas ČR, zasedací pořádek ve třídě),
- **asociace** – soubor objektů G se skládá ze dvou částí G´ a G´´ a pravidla, které každému objektu jedné části přiřadí právě jeden objekt druhé části, např. jeden soubor objektů jsou slova dům, okno, dveře a druhý soubor jsou čísla 3, 4, 5. Přiřazení je dle počtu písmen.

Častým cílem hledání organizace souboru jistých objektů je potřeba zjistit jejich počet. Například kolik je všech možností při hodu dvěma hracími kostkami, červenou a modrou. Touto otázkou se zabývá **kombinatorika**.

Chvilka k zamyšlení

Pokuste se navrhnout více způsobů, jak zaznamenat (zorganizovat) všechny možné hody dvěma kostkami najednou.

Žáci, kteří již v organizaci dat nabyli jistých zkušeností, dělají nejčastěji dvě chyby:

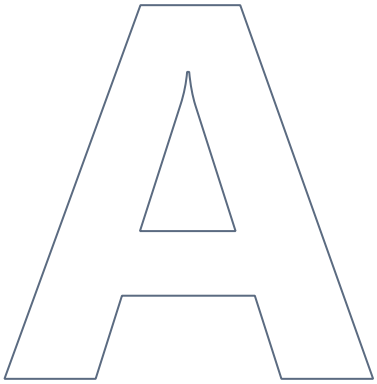
- neujasní si, která data, které objekty do souboru patří a které ne,

- nemají jistotu v tom, zda dva prvky jsou, nebo nejsou „stejné“,

například při hodu dvěma barevně odlišenými kostkami, zda hod červená 3 a modrá 4 je stejný s hodem červená 4 a modrá 3. Učitel tedy musí mít na mysli:

(a) Daný soubor dat, který chceme organizovat a spočítat, musí být přesně vymezen, aby o každém objektu bylo možné rozhodnout, zda do souboru patří, nebo ne.

(b) O každé dvojici objektů ze souboru dat lze rozhodnout, zda jsou stejné, nebo různé.



Využití úloh pro pedagogické diagnostikování žáka nebo třídy

A VYUŽITÍ ÚLOH PRO PEDAGOGICKÉ DIAGNOSTIKOVÁNÍ ŽÁKA NEBO TŘÍDY

Jak již bylo řečeno v úvodu, sledování úspěšnosti žáků v řešení úloh z TIMSS dává možnost porovnat výsledky českých žáků s výsledky stejně starých žáků v zahraničí. Tato skutečnost otevírá prostor k úvahám o obsahu či způsobu výuky u nás. Lze očekávat, že výsledky poskytují spolehlivý obraz o silných a slabých stránkách českých žáků, neboť každou použitou úlohu posoudilo mnoho odborníků a řešilo ji mnoho tisíc žáků. Proto se domníváme, že uvolněné úlohy ze studií TIMSS mohou učitelé využít i jako nástroj pro pedagogické diagnostikování ve své třídě.

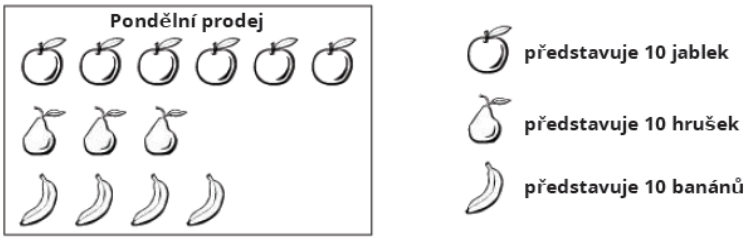
Právě pedagogické diagnostikování představuje v práci učitele velice důležitou činnost, která mu umožňuje získávat důkazy o učení svých žáků a obraz o míře zvládnutí probíraného učiva ve třídě. Zároveň mu ukazuje, kam by mohl své žáky dál vést a kde je potřeba intervence či reedukace. Dále umožňuje učiteli také sledovat u žáků rozvoj širšího spektra kompetencí, např. formulovat a ověřovat hypotézy, argumentovat, plánovat kroky řešení problému, ale také spolupracovat se spolužáky, umět přijmout nabízenou pomoc, nebo si o ni požádat, umět nabídnout efektivní nápovědu, efektivně pracovat s chybou vlastní i s chybou spolužáka, diskutovat o způsobech řešení a porovnat je.

V dalším textu nabízíme zpracování čtyř uvolněných úloh, jejichž cíle se shodují s očekávanými výsledky učení MAT-MAT-004-ZV5-009, Získává data, graficky je zaznamenává, grafický záznam dat čte a interpretuje, z tematického celku Statistika a pravděpodobnost.

Nejdříve na základě teoretických východisek a našich zkušeností konstruujeme stručnou tzv. **a priori analýzu** úlohy – neboli rozebereme text úlohy, popíšeme její matematický obsah, odhadneme možné řešitelské strategie žáků, typické chyby a miskoncepce. Dále upozorníme na jevy, které mohou žákům komplikovat porozumění úloze, a odhadneme kognitivní náročnost úlohy. Některé položky ilustrujeme řešením získaným od našich žáků. Následně uvedeme **výsledky** z celostátního šetření a porovnáme je s výsledky z našeho šetření tak, jak to může dělat učitel se svými žáky. Budeme rozebírat **chyby** žáků a uvažovat o jejich **možných příčinách.** Nakonec se podíváme na zajímavé ukázky konkrétních žákovských řešení.

Úloha 1 (ME61211A, ME61211B)

Majitel obchodu s ovocem sledoval počet jablek, hrušek a banánů prodaných v pondělí.



A. Kolik kusů ovoce se prodalo v pondělí?

Odpověď:

B. Majitel řekl: „V úterý jsem prodal dvakrát tolik jablek jako v pondělí."

Kolik jablek prodal majitel v úterý?

A 180

B 120

C 18

D 12

A priori analýza úlohy

Cíl úlohy: Žák získá informace z graficky organizovaného souboru dat a využije je k řešení problému.

Podúloha A je otevřená a podúloha B je uzavřená s výběrem odpovědi.

Text úlohy uvádí řešitele do kontextu prodeje ovoce a informuje jej o druzích prodávaného ovoce. Kontext úlohy je z reálného života, avšak situace s evidencí prodaného zboží nemusí být blízká zkušenostem každého žáka. V zadání úlohy je popsána evidence dat – počet kusů prodaného ovoce trojího druhu. Evidence je vyjádřena na obrázku v rámečku označeném jako pondělní prodej počtem tří různých symbolů pro tři druhy ovoce. Symboly ovoce jsou uspořádány do tří řádků podle druhu ovoce. Vedle obrázku jsou vysvětlivky symbolů, které udávají hodnotu jednoho symbolu, což je 10 kusů daného ovoce. Následně je formulována otázka podúlohy A, která se ptá na počet kusů ovoce prodaného v pondělí. V podúloze B je dodáno ještě sdělení majitele prodejny informující o množství prodaných jablek v úterý, na což směřuje otázka.

Úkolem řešitele je nejdříve porozumět krátkému textu, přiřadit k sobě slovní pojmenování druhu ovoce a jeho symbol, zorientovat se v obrázku, který je záznamem prodeje sledovaných druhů ovoce. Na základě toho si vytvoří představu, jakým způsobem byla evidence provedena. K tomu je potřeba vzít v úvahu vysvětlivku vedle obrázku o významu každého jednoho symbolu z obrázku, porozumět jí a určit počet kusů ovoce, který znázorňuje skupina symbolů, např. 6 symbolů jablka znamená, že bylo prodáno 6 × 10 ks = 60 ks jablek.

Čísla v zadání úlohy se vyskytují ve dvojí roli. Zaprvé je to **počet** symbolů ovoce, zadruhé je to **veličina** – hodnota jednoho symbolu. (Je to obdobné, jako kdybychom pracovali např. s mincemi – vidíme 6 mincí, to je počet, každá má hodnotu 10 Kč, to je veličina, a tedy hodnota 6 kusů mincí je 60 Kč.)

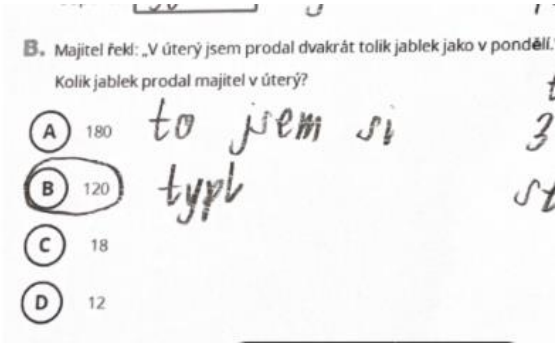
Pro zjištění odpovědi na otevřenou otázku A je potřeba si uvědomit, že slovo ovoce je nadřazený pojem k pojmům jablko, hruška, banán, poté určit počet symbolů každého druhu ovoce a výsledná tři čísla sečíst (6 + 3 + 4 = 13). Nakonec s využitím vysvětlivek vypočítat jejich celkový počet (13 × 10 = 130). Nebo nejdříve vynásobit počty symbolů jednotlivých druhů ovoce deseti a pak čísla sečíst (6 × 10 + 3 × 10 + 4 × 10 = 60 + 30 + 40 = 130).

Pro řešení uzavřené otázky B je potřeba vybrat z obrázku pouze jednu skupinu dat – prodaná jablka v pondělí (6 symbolů jablka, 60 kusů jablek) – a přiřadit výrazu „dvakrát tolik“ správnou operaci násobení dvěma. Žák pak vybere jednu možnost z nabídky čtyř odpovědí. Kromě správného výsledku 120 jsou v nabídce uvedeny výsledky 12, 18 a 180, které všechny mohou dávat smysl. Zvolený výsledek může napovědět, jak žák uvažoval. K výsledku 12 lze dojít spočítáním počtu symbolů jablek a jeho vynásobením dvěma, tedy bez využití vysvětlivky. K výsledkům 180 a 18 lze dojít např. tak, že počítáme prodaná jablka za pondělí a úterý dohromady, případně uvažujeme, že jich prodal v úterý o dvakrát víc. Další možností, jak mohli žáci dojít ke stejným hodnotám, je, že místo jablek uvažovali ovoce (jako v otázce A) a považovali za něj pouze jablka a hrušky, banány nikoliv. Jednalo by se tedy o dvojí chybu – otázku číst jako otázku na ovoce a vynechat banány. Šlo by tedy o chybnou představu o tom, že banán není ovoce, která mohla vzniknout při diskusích o tom, co je zelenina a co ovoce – a že např. rajče není zelenina, což většinu žáků překvapí.

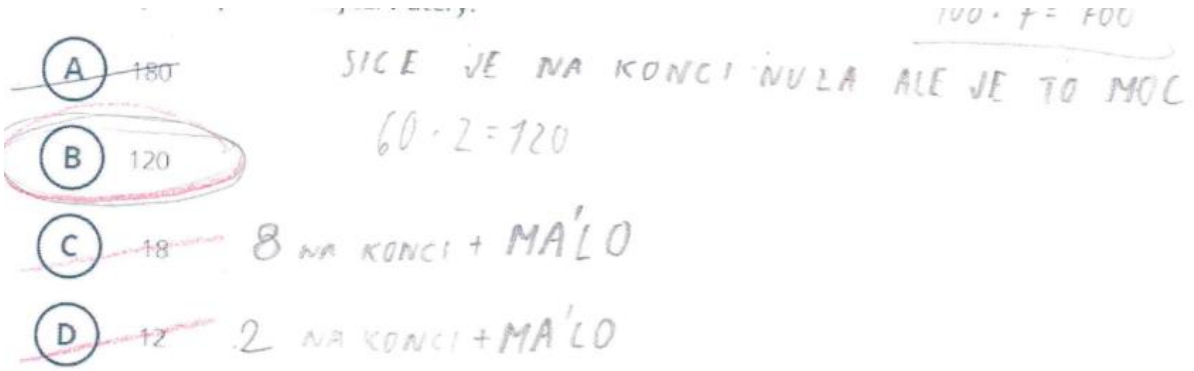
Lze očekávat, že žáci budou řešit úlohu B několika strategiemi: (a) čistě tipovat (obrázek 1.1), (b) více promyšleně odhadovat výsledek (obrázek 1.2), nebo (c) nejdříve zjišťovat výsledek a pak jej vyhledávat v nabídce. Pokud svůj výsledek v nabídce žák nenajde, může to být signál k návratu do zadání úlohy a kontrole svého postupu (obrázek 1.3). Někdy „neúspěch“ způsobí, že žák na řešení rezignuje (obrázek 1.4).

Z hlediska matematiky je od žáka vyžadována dovednost operace násobení číslem 10, popřípadě číslem 2 u podúlohy B, a součtu tří přirozených čísel. Tedy čistě matematické hledisko úlohu nezatěžuje. Podúloha A je složená a je tedy náročnější než podúloha B z hlediska zátěže pracovní paměti – žák musí provést více dílčích početních úkonů a mezivýsledky si buď pamatovat, nebo poznamenat. Náročnost úlohy spočívá tedy především v oblasti práce s daty.

OBRÁZEK 1.1 | Tipování správného řešení

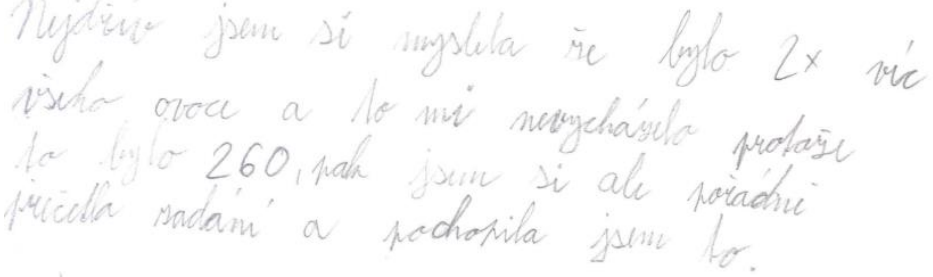


OBRÁZEK 1.2 | Promyšlené prohledávání nabídky výsledků

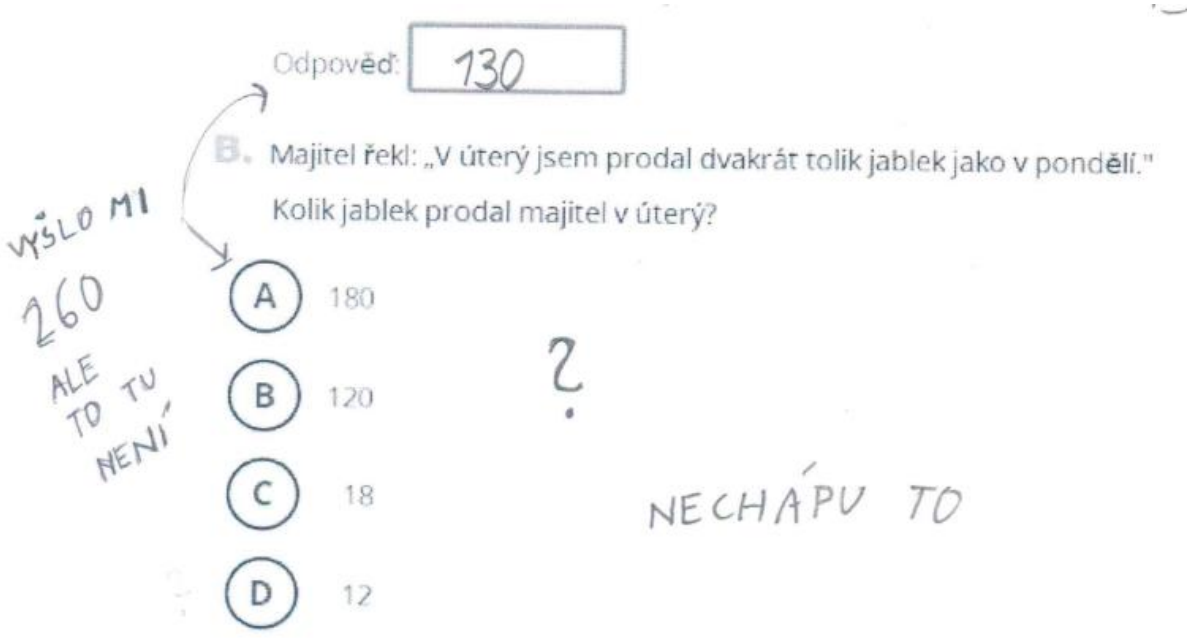


(„*Sice je na konci nula, ale je to moc*.“)

OBRÁZEK 1.3 | Absence vlastního výsledku v nabídce – potřeba kontroly



OBRÁZEK 1.4 | Absence vlastního výsledku v nabídce – rezignace

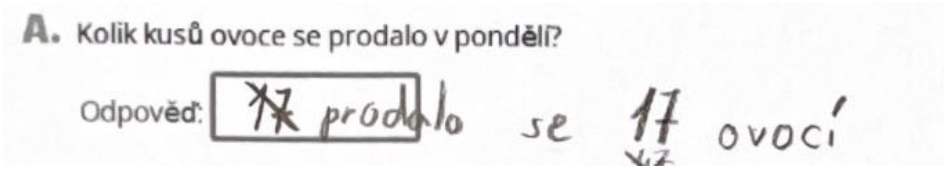


Komplikující jevy při řešení úlohy pro žáky

Podrobně jsme zadání úlohy rozebrali proto, aby se nám vynořily jevy, které mohou žákům komplikovat porozumění úloze a stát se tak případným zdrojem chyby. Za komplikující jevy lze považovat:

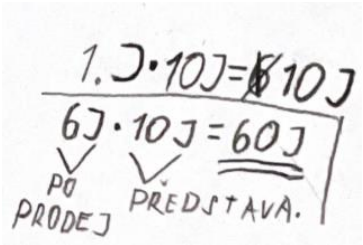
- **zadání informací dvojím způsobem** – slovně a symboly; symboly vizualizují tři typy ovoce, které jsou zapsány slovně,
- **práce s dvojí rolí čísla:** číslo jako počet (počet symbolů ovoce) a jako veličina (hodnota jednoho symbolu, která je dána ve vysvětlivkách),
- **přítomnost jazykového jevu** nadřazenost pojmů, tj. ovoce jako nadřazený pojem pojmům jablko, hruška, banán,
- **náročnost skloňování slova ovoce** (obrázek 1.5),

OBRÁZEK 1.5 | Skloňování slova ovoce



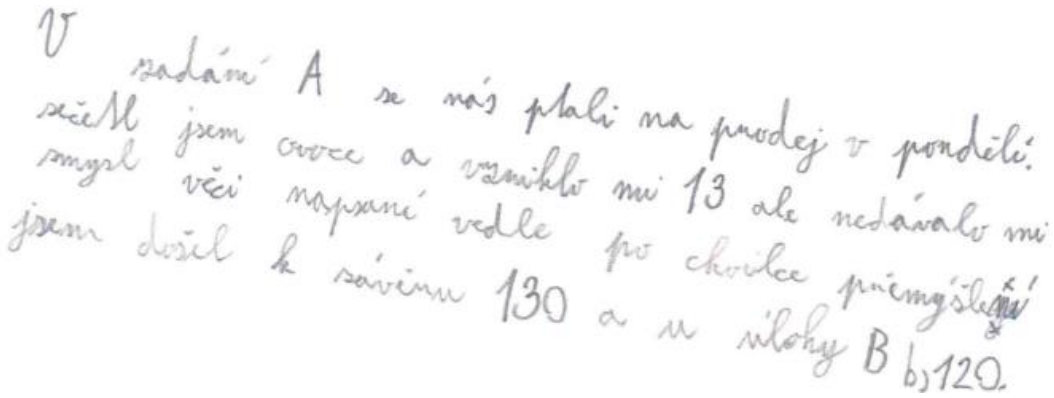
- **nejednoznačnost významu organizace symbolů** evidujících prodané ovoce. Obrázek v rámečku *Pondělní prodej* umožňuje i jiné výklady; kupříkladu že majitel si nejdříve vyznačil počet kusů ovoce, které měl, např. 10, případně 6, a pak umazával symboly představující prodané kusy, např. na obrázcích 1.10, 1.11 a 1.12 níže,
- **možnost řešit úlohu B smysluplně i bez vysvětlivek**, což vede k výsledku 12, který je v nabídce odpovědí,
- **nejasnost vysvětlivek vedle obrázku**, které když čteme jako „jablko představuje 10 jablek“, jsou poněkud nesrozumitelné. Je možná i taková interpretace, že na obrázku v rámečku je např. šest jablek a vedle obrázku je ještě jeden symbol ovoce, který znamená 10 kusů daného ovoce, tedy že např. jablek je 16 (6 + 10),
- **nezvyklé použití slova „představuje“.** V běžném jazyce se častěji používá ve významu představit se někomu, představa o něčem, méně pak ve významu reprezentovat, znamenat. Sice správné, ale neobratné použití slova představa vidíme např. na obrázku 1.6,

OBRÁZEK 1.6 | Představa



- **nereálnost „reálného“ kontextu.** Je pravděpodobné, že se žák se situací, jak obchodník sleduje počet kusů prodaného ovoce, ještě nesetkal. Uvedené ovoce se obvykle prodává na váhu, nikoli na počet. O tom, že žáci mnohdy pátrají po smyslu výsledku úlohy, svědčí např. řešení na obrázku 1.7,

OBRÁZEK 1.7 | Smysl úlohy



- **neúplnost otázky A.** V otázce A chybí sdělení, že se jedná pouze o sledované ovoce. Obchodník mohl prodat i nějaké další druhy ovoce, které však nesledoval. A dále chybí informace, že počet prodaných kusů každého druhu ovoce byl vždy v celých desítkách. A když prodal například jen 9 jablek, ještě to symbolem nezaznamenal.

Výsledky

V tabulce 1A uvádíme souhrn výsledků podúlohy A a v tabulce 1B podúlohy B. V hranaté závorce je uvedena četnost daných odpovědí v procentech. V řádku ČR jsou uvedeny výsledky celostátního šetření, v řádku P (pilotáž) výsledky z našeho šetření.

TABULKA 1A | Výsledky podúlohy A

A	Počet správných odpovědí 130	Počet chybných odpovědí 13	Počet jiných chyb	Celkem	Neřešeno
ČR	176 [20,4]	349 [40,5]	337 [39,1]	862	96
P	24 [58,5]	6 [14,6]	11 [26,8]	41	0

V tabulce je uvedena pouze četnost chyby 13. Do sloupečku počet jiných chyb u našich žáků jsou zahrnuty tyto chyby: 17 [6×], 50 [2×], 60 [2×], 180 [1×].

TABULKA 1B | Výsledky podúlohy B

B	Počet správných odpovědí 120	Počet chybných odpovědí 12	Počet chybných odpovědí 180	Počet chybných odpovědí 18	Celkem	Neřešeno
ČR	295 [34,2]	329 [38,2]	76 [8,8]	162 [18,8]	862	96
P	25 [65,8]	10 [26,3]	2 [5,3]	1 [2,6]	38	3

Další chyby, než jsou uvedeny v tabulce, se v podúloze B ani nemohly vyskytnout kvůli nabídce odpovědí. Jen dva žáci napsali výsledek 260, který nenašli v nabídce.

Na řešitelskou úspěšnost u úloh tohoto typu, u nichž je klíčová interpretace graficky prezentovaných dat, má podle našich zkušeností vliv zejména předchozí zkušenost žáků s podobným typem zadání. Z obou tabulek je patrné, že naši žáci byli více saturováni zkušenostmi s prací s daty.

Je zajímavé, že ve vzorku ČR je četnost správných odpovědí v úloze A výrazně nižší (20,4 %) než v úloze B (34,2 %). Lze uvažovat, že tento rozdíl mohl být způsoben právě interpretací slova ovoce, vyšší kognitivní náročností podúlohy A, případně možností tipování v podúloze B. Vzhledem k tomu, že u našich žáků je tento rozdíl v četnosti správných

odpovědí malý (58,5 % a 65,8 %), lze usoudit, že právě orientace v datech v zadání úlohy je jednou z možných příčin menší úspěšnosti podúlohy A ve vzorku ČR.

Z tabulek vyplývá další zajímavý jev, a sice, že u našich žáků je četnost chyby 13 v podúloze A (14,6 %) menší než četnost chyby 12 v podúloze B (26,3 %), když na první pohled se zdá být příčina obou chyb stejná. V šetření ČR je rozdíl minimální. O tomto jevu budeme uvažovat níže.

Pokud žáci nemají zkušenosti s prací s daty a jsou nuceni překonávat překážky, obvykle se startuje jejich tvořivost v interpretaci ne zcela jednoznačně popsaných dat. Vždy však hraje významnou roli úroveň porozumění textu neboli čtenářská gramotnost žáka.

Ukázky konkrétních žákovských řešení

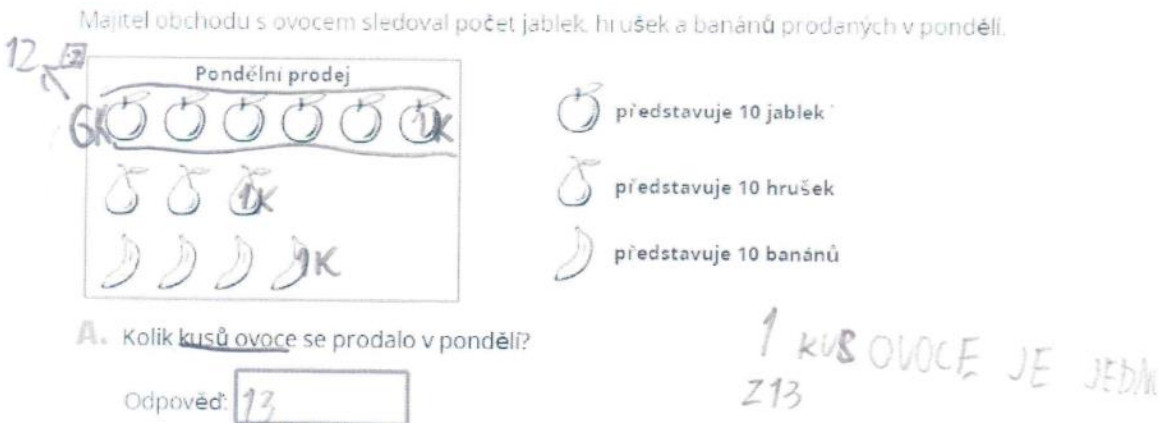
Abychom mohli nastavit návrh metodiky práce s danou úlohou, pokusíme se odhalit příčiny chyb, nedostatků, neočekávaných řešení. Vzhledem k tomu, že jsme pracovali pouze s písemnými řešeními našich žáků a pouze s výsledky žáků celostátního šetření, budou naše úvahy spekulativní. Budeme využívat žákovská písemná sdělení (naši žáci měli za úkol co nejpodrobněji zapsat, jak přemýšleli, a zdůvodnit svá řešení) a naše zkušenosti z praxe a z vlastních výzkumů, případně z výzkumů popsaných v odborné literatuře.

Chyby v podúloze A

Výsledek 13

Chybné řešení 13, které je výrazně časté v šetření ČR (40,5 %), je pravděpodobně způsobeno buď tím, že si žáci poznámku u tabulky s ovocem nepřečetli, nebo tím, že jí neporozuměli. Žáci počítali jednotlivé symboly jako jednotlivé kusy ovoce, jak je to zdůrazněno např. na obrázku 1.8.

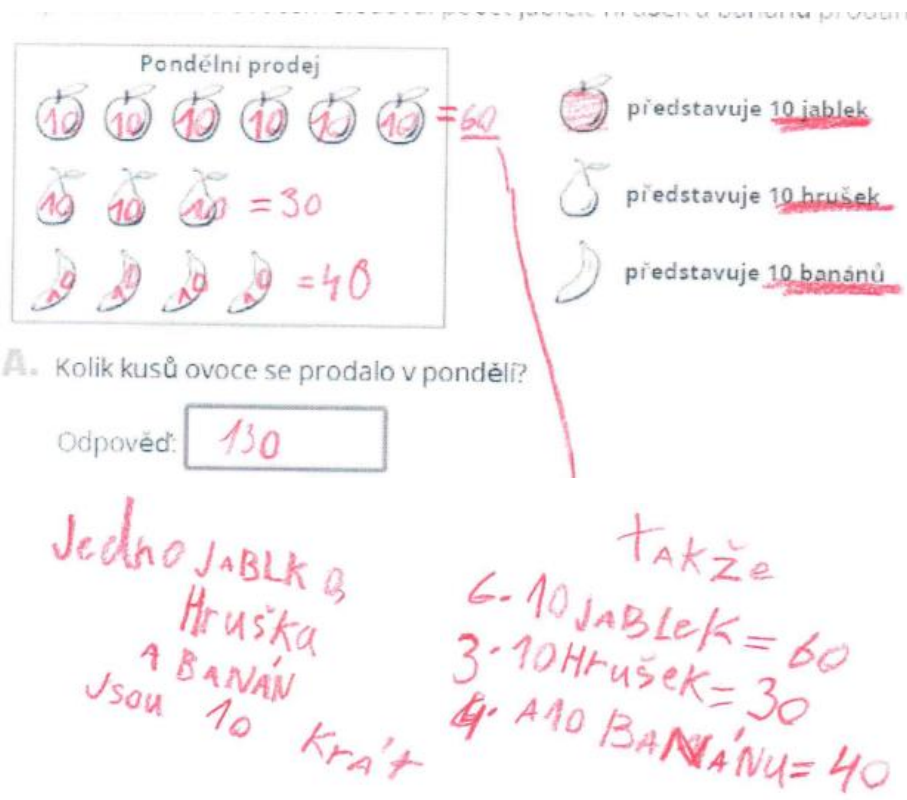
OBRÁZEK 1.8 | Neporozumění vysvětlivkám



Příčin, proč někteří žáci nevyužili vysvětlivky, že jeden symbol ovoce znamená 10 kusů skutečného ovoce, může být několik:

- nedočtení textu vysvětlivek k obrázku,
- neuvědomění si spojitosti obrázku a vysvětlivek,
- odlišná interpretace obrázku a vysvětlivky,
- menší kapacita pracovní paměti – žák vyčerpá svou kognitivní energii na orientaci v zadání a pak při samotném výpočtu již zapomene zohlednit další informace. O tom, že pro některé žáky je orientace v situaci energeticky náročná, svědčí např. řešení na obrázku 1.9, kde žák do každého jednoho symbolu pracně zapíše jeho hodnotu. Nebo na obrázku 1.8 výše žák pečlivě vysvětluje, co pro něj znamená 1 kus ovoce.

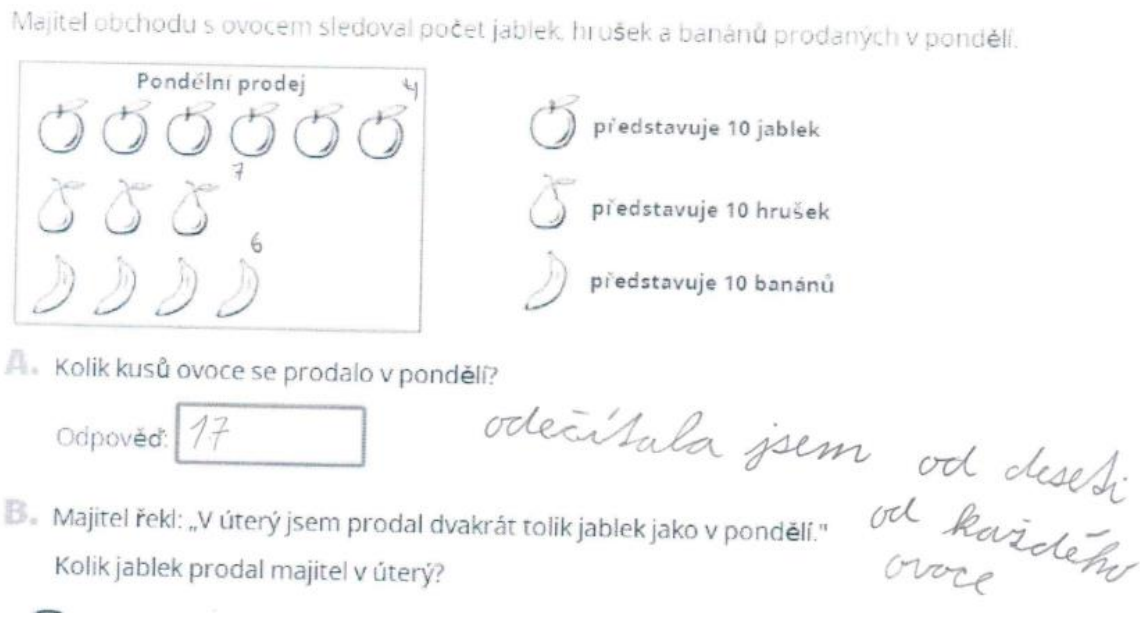
OBRÁZEK 1.9 | Podrobná evidence údajů



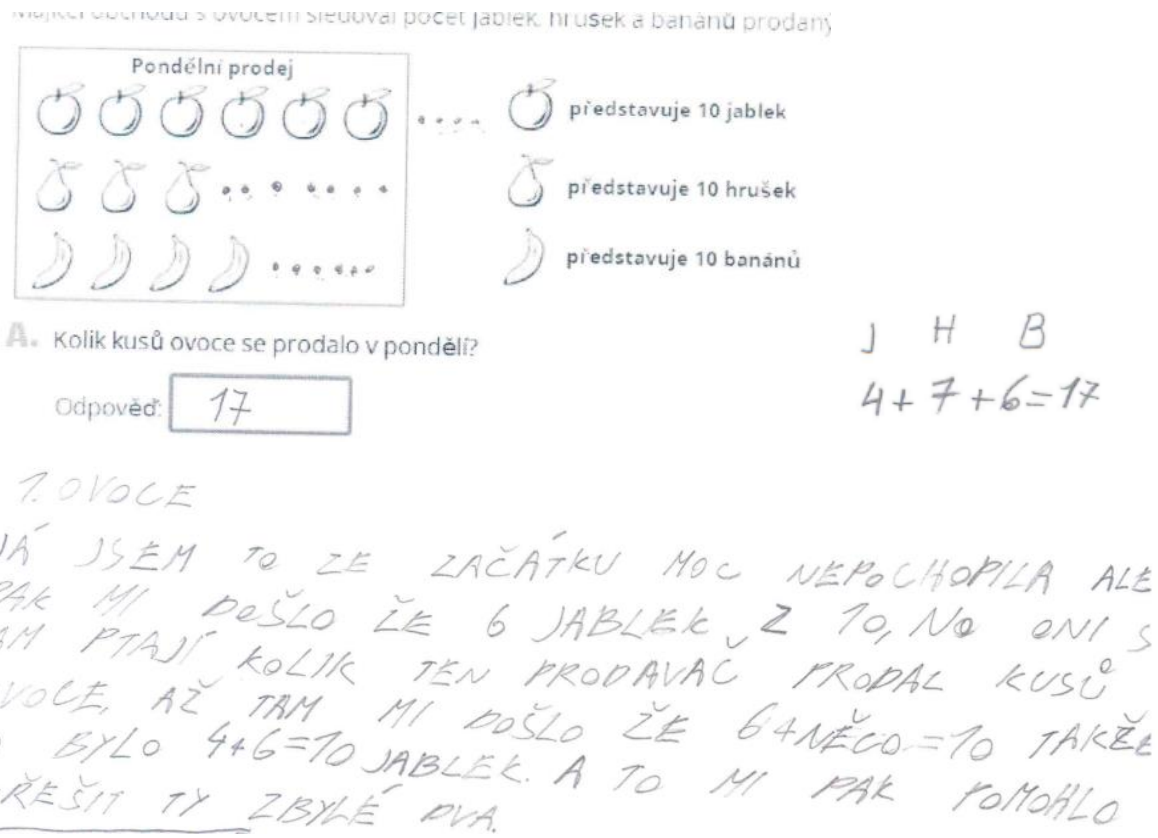
Výsledek 17

Chyba **17** (14,6 % u našich žáků) s jistotou vznikla odlišnou interpretací obrázku od našeho očekávání. Je to patrné z obrázků 1.10, 1.11, 1.12. Žáci interpretovali vysvětlivky tak, že v řádku v rámečku bylo původně 10 kusů ovoce, a počítali, kolik jich do 10 chybí. Jiná možnost je, že žáci přemýšleli tak, že „Obchodník si nejdříve vyznačil 10 symbolů ovoce, které měl na začátku dne. Prodané kusy si postupně odmazával – 4 jablka, 7 hrušek a 6 banánů, tedy celkem 17 kusů.“ Tuto interpretaci situace zadání úlohy též umožňuje.

OBRÁZEK 1.10 | Odčítání od 10

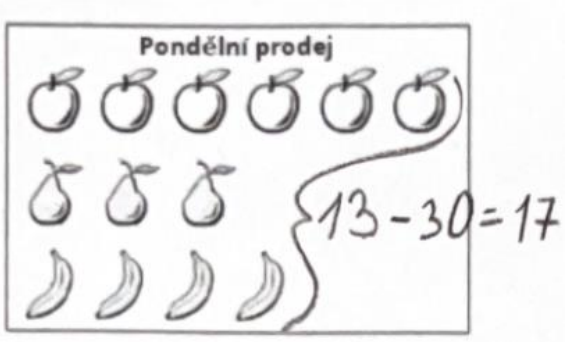


OBRÁZEK 1.11 | Dočítání do 10



Na obrázku 1.12 si navíc všimněme, že žák kromě toho, že odečítá celkový počet symbolů od 30, pravděpodobně uvažuje o výsledku 30 − 13 správně, jen zápis 13 − 30 je chybný. Nebo uvažuje, že operace odčítání je komutativní. Někdy totiž žáci například při kontrole čtou zápis zprava doleva, tedy 17 = 30 − 13, což je správně.

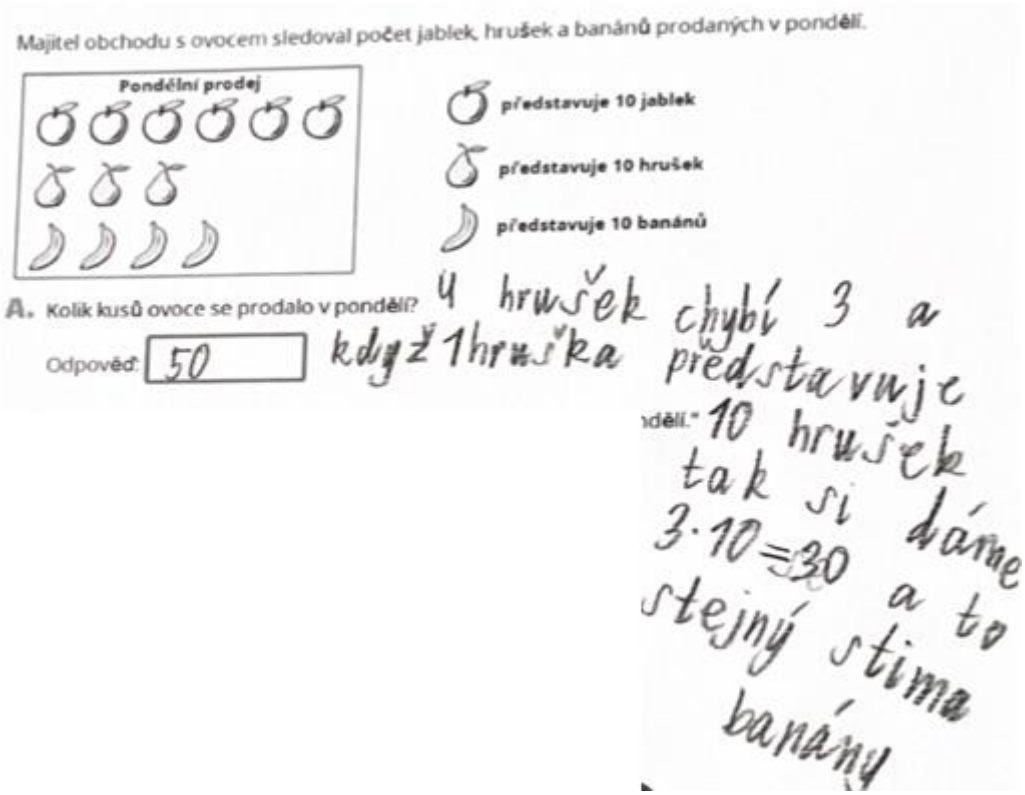
OBRÁZEK 1.12 | Odčítání od 30



Výsledek 50

K výsledku 50 se žáci dopočítali pravděpodobně obdobnou cestou jako k 17. Žáci dopočítávali symboly v jednom řádku pouze do 6, neboť první řádek je plný a je tam 6 symbolů (obrázek 1.13). Informaci o hodnotě jednoho symbolu však uvažovali. Je tedy otázkou, zda tento výsledek vůbec považovat za chybu, neboť to, co je podstatou úlohy, žák zvládnul. Nejde tedy ani o chybnou interpretaci dat na obrázku, ani o matematickou chybu, ale pouze o odlišnou a smysl dávající interpretaci.

OBRÁZEK 1.13 | Výsledek 50



Výsledek 60

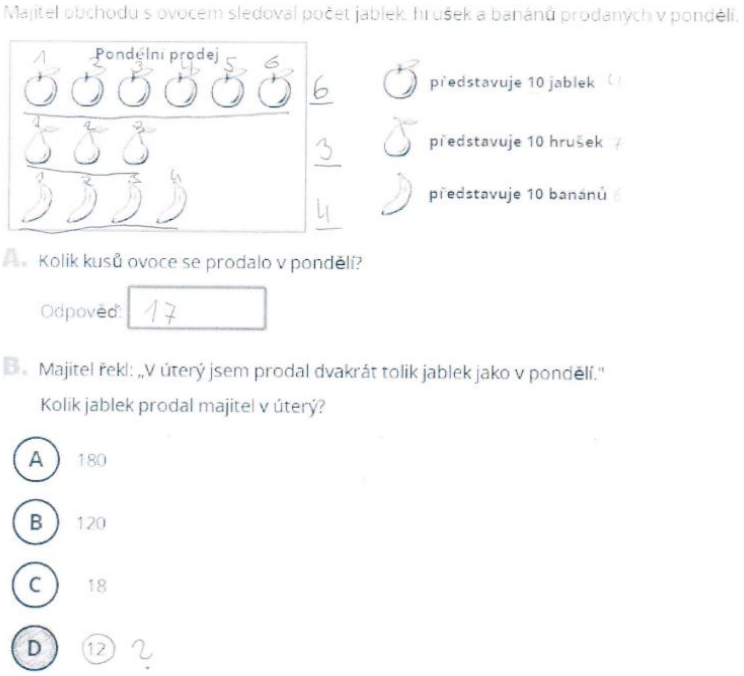
Příčina výsledku 60 spočívá pravděpodobně v tom, že žáci počítali pouze s jablky, jak vyžaduje podúloha B. Nejde tedy ani o chybu matematickou, ani strategickou, ale čtenářskou a porozumění kontextu.

Chyby v podúloze B

Výsledek 12

Tento výsledek žáci dostali stejně jako výsledek 13 v podúloze A. Proč je ale podíl odpovědí s výsledkem 12 v této úloze téměř o 10 procentních bodů vyšší než podíl odpovědí s výsledkem 13 v podúloze A, když četnost správných výsledků 130 a 120 je srovnatelná? Všichni žáci, kteří uvedli v A výsledek 13, uvedli v B výsledek 12. Tedy nepracovali s vysvětlivkami a uvažovali jeden symbol za jeden kus ovoce. Žáci správně vybrali počet jablek prodaných v pondělí a vynásobili jej dvěma. Výsledek 12 v B je však navíc ještě kombinován s výsledkem 17 v A. Obvykle je řešení provázeno nejistotou žáka (obrázek 1.14), protože konzistentní výsledek v B by měl být 8, neboť v pondělí prodal majitel 4 jablka. To však v nabídce nebylo. Žák se pak domníval, že úloze nerozumí.

OBRÁZEK 1.14 | Nekonzistentnost výsledků



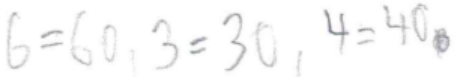
Výsledek 18 a 180

K těmto výsledkům žáci dospěli pravděpodobně tak, že správně uvažovali jablka, ale počítali prodaný počet kusů za pondělí a úterý dohromady. Konkrétní hodnota pak závisí na tom, zda použili vysvětlivku či nikoli.

Zajímavé jevy ze správných žákovských řešení

- **Žák interpretuje číselně vysvětlivky (jablko představuje 10 jablek, …) vedle obrázku.**

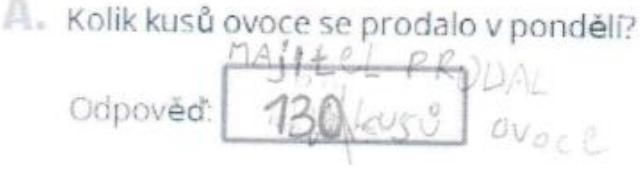
OBRÁZEK 1.15 | Chybný zápis dobré myšlenky



Při čtení zápisu na obrázku 1.15 by mohl být učitel matematik nespokojený. Formálně je zápis chybný, ale myšlenkově je zcela správný. Žák jen nemá nástroje na to, aby odlišil význam čísel na obou stranách rovnítka. Číslo na levé straně rovnítka znamená počet, např. 6 symbolů jablek, a na druhé straně rovnítka veličinu, hodnotu šesti symbolů, tedy 60 kusů ovoce. Učitel by určitě měl přistoupit k diskusi o významu čísel na obou stranách rovnítka a o tom, jak by to bylo možné zapsat z hlediska matematiky správně. Jistě by zde k porozumění podstaty problému pomohlo připodobnění, které je žákům známé z oblasti míry. Například rovnost dvou veličin 6 m = 60 dm běžně zapisujeme s jednotkami, ale když je ze zápisu vynecháme, zápis 6 = 60 je chybný a nerozumíme mu.

- **Žák má potřebu odpovědět celou větou.**

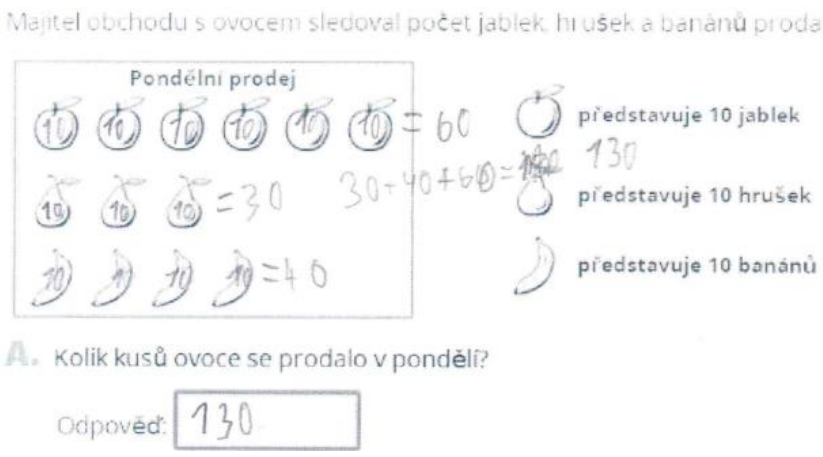
OBRÁZEK 1.16 | Odpověď celou větou



Při výuce žáky často vedeme k tomu, aby řešení zejména slovních úloh sdělovali celou větou, a tím dali najevo, že vědí, co vlastně spočítali. V testech však často chceme ušetřit jak čas, tak i energii žáků, a chceme zjednodušit vyhodnocení výsledků skupiny žáků, proto vymezíme prostor pro samotný výsledek podobně jako v této úloze. Je důležité, abychom si jako učitelé uvědomovali, že se někteří žáci mohou cítit nepříjemně (obrázek 1.16), když se snaží vměstnat celou odpověď do nepřiměřeně malého místa. Proto by bylo vhodné žáky dobře instruovat o způsobu zápisu odpovědi.

- **Žák si dopsal do každého symbolu jeho hodnotu 10.**

OBRÁZEK 1.17 | Odlehčení zátěže pracovní paměti



Nám dospělým se může zdát, že žák dělá zbytečnou práci, když si číslo 10 zapíše do každého jednoho symbolu (obrázek 1.9 a obrázek 1.17). Vždyť to stačí napsat jen do jednoho symbolu, případně vůbec, protože to je již přece napsáno vedle ve vysvětlivkách. Toto pracné zapisování při řešení úlohy má své opodstatnění – žák získává čas na uvědomění si a ubezpečení se o významu vysvětlivky a šetří pracovní paměť. Je to vnitřní potřeba žáka, kterou opustí a bude své zápisy ekonomizovat, až to sám nebude potřebovat.

Úloha 2 (ME71135A, ME71135B)

V tabulce vidíš počty bodů, které žáci získali ve třech kolech hry.

	Marek	Tereza	Jirka	Jana
1. kolo	19	18	20	11
2. kolo	17	12	14	9
3. kolo	15	16	13	16

A. Kdo získal nejvíce bodů ve 2. kole?

A Marek

B Tereza

C Jirka

D Jana

B. Kdo získal méně bodů ve 3. kole než ve 2. kole?

A priori analýza úlohy

Cílem úlohy je: Žák se orientuje v záznamu dat organizovaných do dvouparametrické tabulky a vyhledá informace pro řešení problému.

Podúloha A je uzavřená s výběrem odpovědi a podúloha B je otevřená. Zde je třeba upozornit na to, že zadání v TIMSS nabídlo žákům dvě rolovací okna s nabídkou jmen daných čtyř žáků. Tedy úloha v TIMSS byla uzavřená s výběrem dvou jmen.

Kontext úlohy je reálný a blízký žákovým zkušenostem. Situace je nejdříve uvozena textem vysvětlujícím následnou tabulku. Je to evidence bodů získaných ve třech kolech jisté hry, kterou hráli čtyři žáci. Body každého žáka z každé hry jsou uspořádány do dvouparametrické tabulky – pořadí kola jisté hry ve svislém záhlaví, jméno žáka ve vodorovném záhlaví. Protože žáci jsou čtyři a hráli tři kola hry, má tabulka rozměr 3 × 4, tedy 12 polí. Každé pole reprezentuje dvojici [pořadí kola hry, účastník hry] a číslo v něm zapsané znamená počet bodů získaných v daném kole daným hráčem ([kolo, hráč] → počet bodů). Tabulka je jednoznačná a orientace v ní pravděpodobně nebude činit žákům žádné obtíže.

Otázka podúlohy A směřuje na výběr řádku tabulky, kde jsou zaznamenány výsledky 2. kola hry, tedy druhého řádku, a pak na porovnání čtyř přirozených čísel v oboru do 20 a určení největšího z nich – 17. Toto číslo je v prvním sloupci, kde jsou zaznamenány výsledky her Marka. Jeho jméno je výsledek podúlohy A.

Lze očekávat, že takto žáci budou úlohu řešit – nejdříve zjistí, že ve druhém kole Marek získal nejvíce bodů, a pak toto jméno zaškrtnou v nabídce. Pravděpodobně podúloha A nebude dělat žákům problémy ani z hlediska orientace v tabulce, protože se s obdobnými tabulkami žáci 4. a 5. ročníku jistě již několikrát setkali, ani z hlediska matematiky, protože jde pouze o určení největšího čísla ze čtyř přirozených čísel do 20, což je úroveň 1. ročníku ZŠ.

Je patrné, že podúloha B klade mnohem větší nároky na pracovní paměť žáka. Po zorientování se v tabulce je třeba zaměřit pozornost na první sloupec, v něm pak na čísla 2. a 3. řádku, porovnáme je a rozhodneme, které je menší. Uvědomíme si podmínku, že zjišťujeme, zda je číslo ve 3. řádku menší než ve 2. Pokud tomu tak je, z vodorovného záhlaví zjistíme jméno hráče a to je součástí řešení. Takto projdeme všechny čtyři sloupce. Výsledkem jsou dvě řešení – Marek a Jirka.

Typ podúlohy B se v učebnicích vyskytuje jen ojediněle.

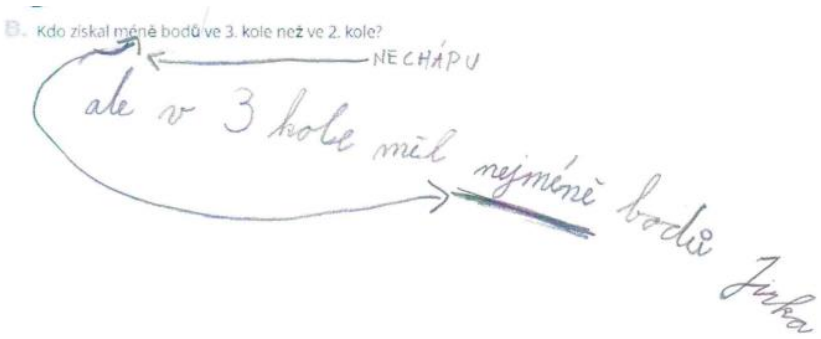
Komplikující jevy při řešení úlohy pro žáky

Obtíž a případně zdroj neúspěchu při řešení úlohy může pramenit z nedostatečné úrovně čtení s porozuměním zejména otázky podúlohy B.

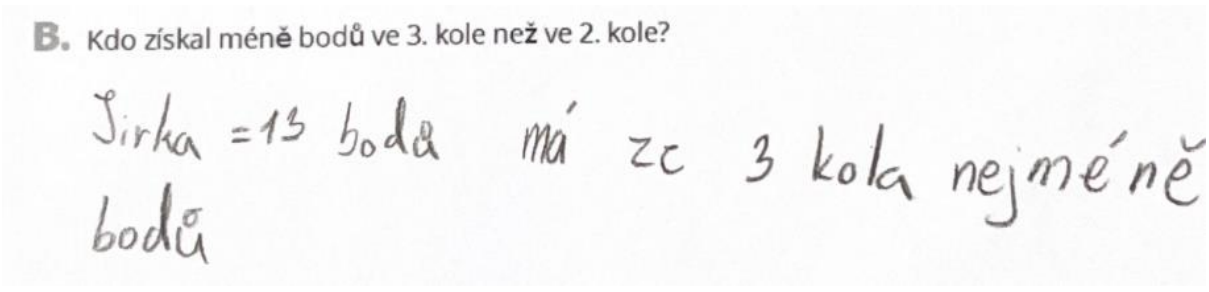
Komplikace může způsobit:

- **podobnost znění otázek A a B.** Začátek obou otázek je stejný a na první pohled se pouze mění slovo nejvíce na méně, 2. kolo na 3. kolo. To svádí žáky k úspoře kognitivní energie při uchopování podúlohy B a z otázky již vnímají jen slova méně, které interpretují jako nejméně, a 3. kolo. Zbytek věty nedočtou (obrázek 2.1). Nebo dočtou, ale spojku „než“ nevnímají jako výzvu k porovnání, ale jako spojku „a“. Žák na obrázku 2.2 určil chybně Terezu s nejmenším počtem získaných bodů ve 2. kole a Jirku ve 3. kole, což je správně. Přehlédnutí Jany ve 2. kole, která měla méně bodů než Tereza, mnozí učitelé hodnotí jako nepozornost. Takováto nepozornost často bývá důsledkem vyčerpání kapacity pracovní paměti.

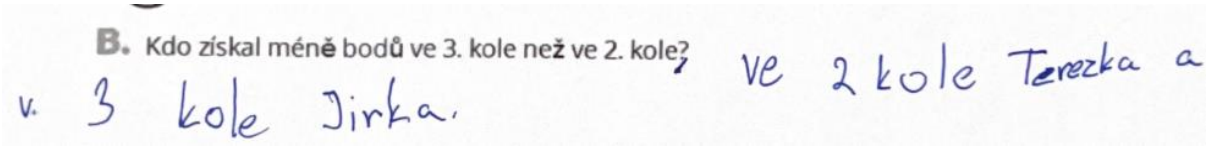
OBRÁZEK 2.1.a | Méně = nejméně



OBRÁZEK 2.1.b | Méně = nejméně

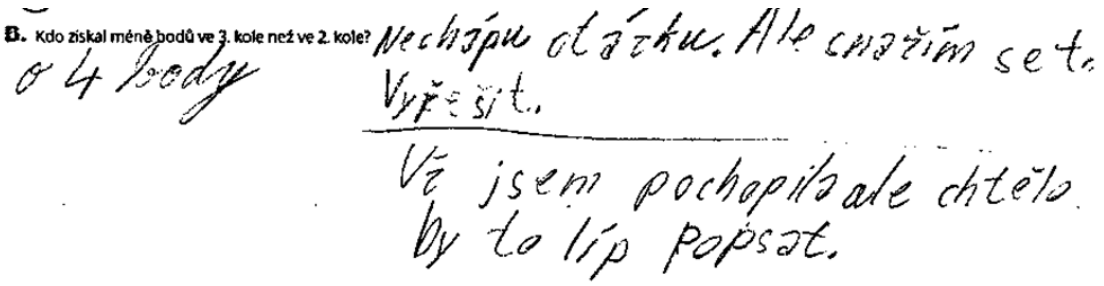


OBRÁZEK 2.2 | Neporozumění spojce než



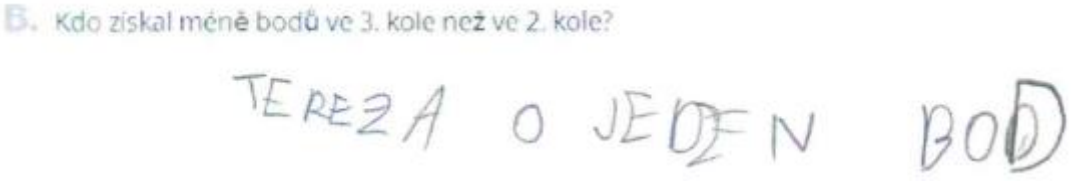
Náročnost porozumění otázce B ukazuje i žák na obrázku 2.3. Odpověď „o 4 body“ by mohla nasvědčovat tomu, že slovo „než“ přivedlo žáka k této interpretaci otázky: O kolik bodů měla Tereza ve 2. kole méně než ve 3.? To také více odpovídá zkušenostem žáků – při hře, ve které se získávají body, děti spíše porovnávají, kdo a o kolik bodů má více či méně, než kdo má v jednom kole méně bodů než v jiném. To při hře nedává moc smysl.

OBRÁZEK 2.3 | O 4 body



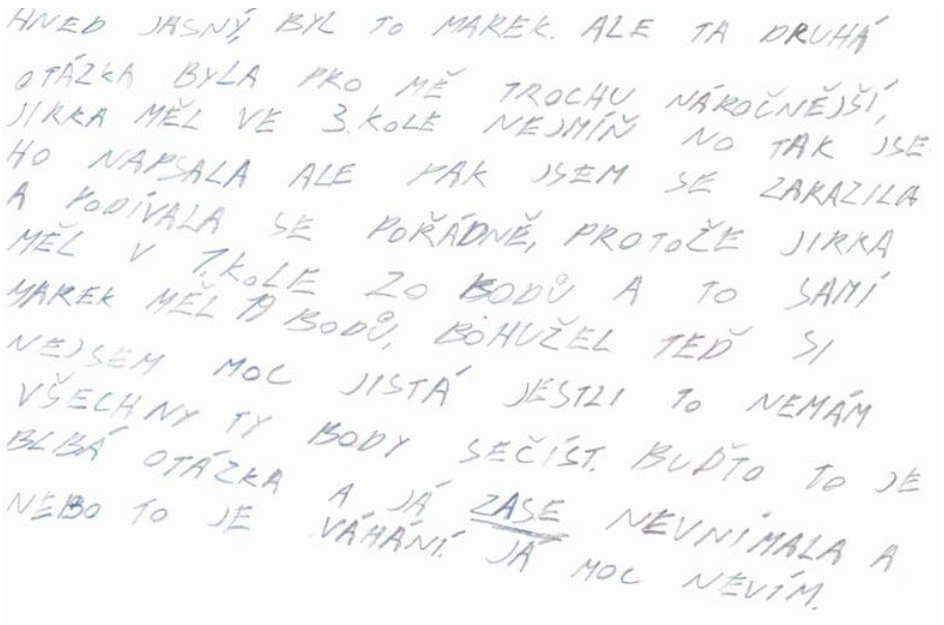
Na obrázku 2.4 žák mohl odpovídat na otázku „o kolik bodů méně získal hráč ve 3. kole než ve 2.“. A pak se přehlédl o sloupec a místo Jirka napsal Tereza. Opět je to doklad nároků na žákovu pozornost. Nebo se žák zaměřil na porovnání Marka a Terezy ve 3. kole.

OBRÁZEK 2.4 | Odpověď na vlastní otázku



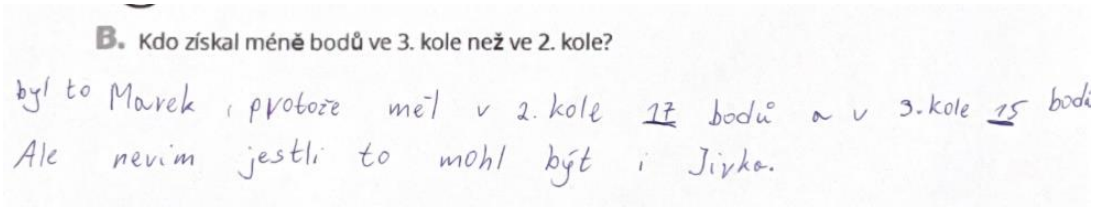
- **otázka, která nevede k výpočtu**. Ani jedna z otázek úlohy nevede k výpočtu, ale pouze k porovnávání čísel, a výsledek je prezentován jménem hráče. Některé didaktické stereotypy při výuce mohou vést k vytvoření předsudku u žáků, že při řešení slovní úlohy je nutné něco spočítat, jak ukazuje například řešení žákyně na obrázku 2.5. Další ukázky jsou uvedeny níže.

OBRÁZEK 2.5 | Potřeba počítání ve slovní úloze



- **dvě řešení podúlohy B a formulace otázky v jednotném čísle.** Mnohé učebnice předkládají žákům téměř výhradně úlohy, které mají právě jedno řešení, a tak může vzniknout stereotyp, že každá slovní úloha má vždy právě jedno řešení. Pokud má některá úloha více řešení, obvykle bývá součástí zadání úlohy výzva, aby řešitel našel dvě, více, případně všechna řešení. Samozřejmé uvažování žáka o více řešeních úlohy, i když otázka naznačuje jedno řešení, či o podmínkách řešitelnosti patří k nejvyšší kultuře procesu řešení. Jak bylo výše uvedeno, v originálním zadání úloh byla nabídka výběru dvou jmen pomocí rolovacích oken, tedy tento problém nenastal. O nejistotě, zda úloha může mít více řešení, vypovídá žák na obrázku 2.6.

OBRÁZEK 2.6 | Může mít úloha i dvě řešení?



- **nejednoznačnost otázky A.** Otázku A (Kdo získal nejvíce bodů ve 2. kole?) lze také interpretovat tak, že úkolem je najít hráče, který ve svém druhém kole získal ze všech tří kol nejvíce bodů. Tomu by odpovídala odpověď „nikdo“. Protože úloha je uzavřená a tuto možnost nenabízí, žádný žák ji ani nemohl uvést.

Výsledky

V tabulce 2A uvádíme souhrn výsledků podúlohy A a v tabulce 2B podúlohy B. V hranaté závorce je uvedena četnost daných odpovědí v procentech. V řádku ČR jsou uvedeny výsledky celostátního šetření, v řádku P (pilotáž) výsledky z našeho šetření.

TABULKA 2A

A	Počet správných odpovědí A. Marek	Počet chybných odpovědí – B, C nebo D	Celkem	Neřešeno
ČR	826 [88,2]	111 [11,8]	937	34
P	40 [97,6]	1 [2,4]	41	0

TABULKA 2B

B	Počet správných odpovědí J+M	Počet chybných odpovědí – jedna nebo žádná správně	Celkem	Neřešeno
ČR	595 [68,0]	280 [32,0]	875	96
P	23 [56,1]	18 [43,9]	41	0

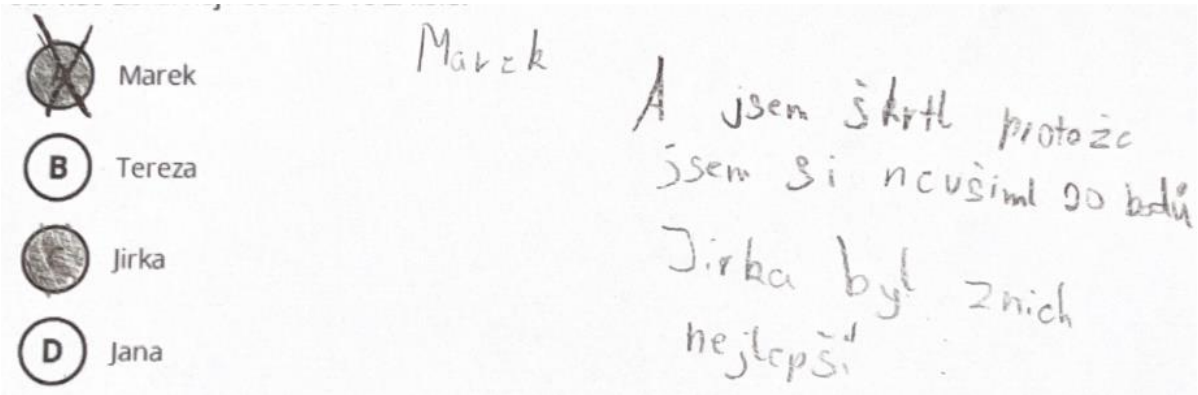
Úspěšnost řešení podúlohy A byla podle očekávání vysoká v obou sledovaných skupinách. U podúlohy B je nižší skóre ve skupině P způsobeno uvedenou odlišností v zadání. Odpovědí s uvedením pouze jednoho jména hráče je 31,7 %. Zůstává otázkou, zda tato řešení hodnotit jako nesprávná, když je formulace otázky v jednotném čísle. To záleží na tom, jak učitel žáky vede. Ostatní chybné odpovědi, které se vyskytly po jedné, byly: Tereza, Tereza a Jana, Tereza a Jirka, nikdo 2×.

Ukázky konkrétních žákovských řešení

Chyby v podúloze A

Jediná chyba, která se u našich žáků v podúloze A vyskytla, byla zřejmě způsobená nedostatečnou kapacitou krátkodobé paměti daného žáka. Žák nejdříve úlohu vyřešil dobře, pak se pro kontrolu před sepsáním argumentu a vysvětlením svého výpočtu vrátil do tabulky. Tam si všiml čísla 20 jako největšího z celé tabulky a vytěsnil z mysli podmínku, že má body vybrat pouze ze 2. kola. Svědčí to o kognitivní náročnosti jak orientace v tabulce, tak i práce se dvěma podmínkami pro daného žáka (obrázek 2.7).

OBRÁZEK 2.7 | Práce se dvěma podmínkami

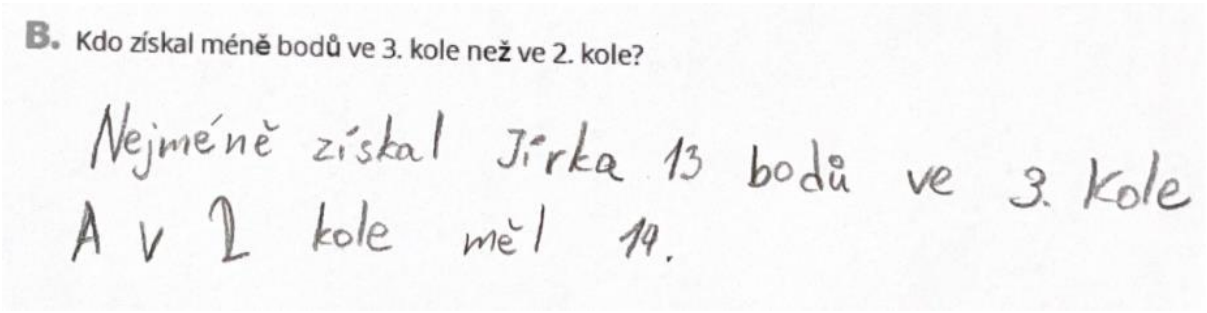


Chyby v podúloze B

Jak vyplývá z tabulky, většina chyb v podúloze B (31,7 % z celkového počtu žáků) byla způsobena uvedením jména pouze jednoho hráče, tedy jedním ze dvou řešení. 12 ze 41 řešitelů uvedlo pouze jméno Jirky a 1 řešitel uvedl pouze Marka. Příčina této chyby byla výše diskutována. Žák na obrázku 2.8 odpovídá na otázku „kdo získal nejméně bodů ve 3. kole“ (podobně jako žáci na obrázcích 2.1a, 2.1b). Jistou pozornost věnoval však i 2. kolu a výsledek 14 pouze konstatoval.

Bohužel zadání údajů v tabulce úlohy umožňuje, že úvaha vyplývající z nesprávné interpretace otázky B („kdo získal nejméně bodů ve 3. kole“ – myšleno ze všech kol) vede ke správnému výsledku – Marek a Jirka. Aby tato chybná úvaha vedla k chybnému výsledku, stačilo by změnit například čísla 19 a 20 v prvním řádku třeba na 13 a 12.

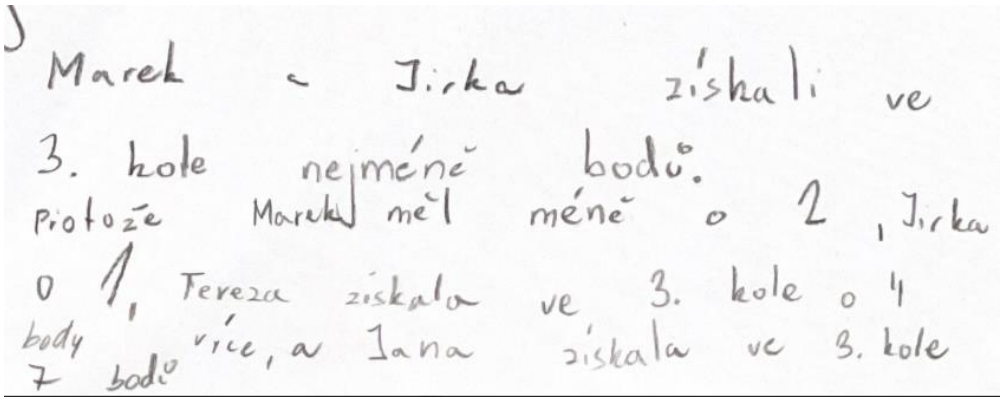
OBRÁZEK 2.8 | Neporozumění otázce B



Zajímavé jevy ze správných žákovských řešení

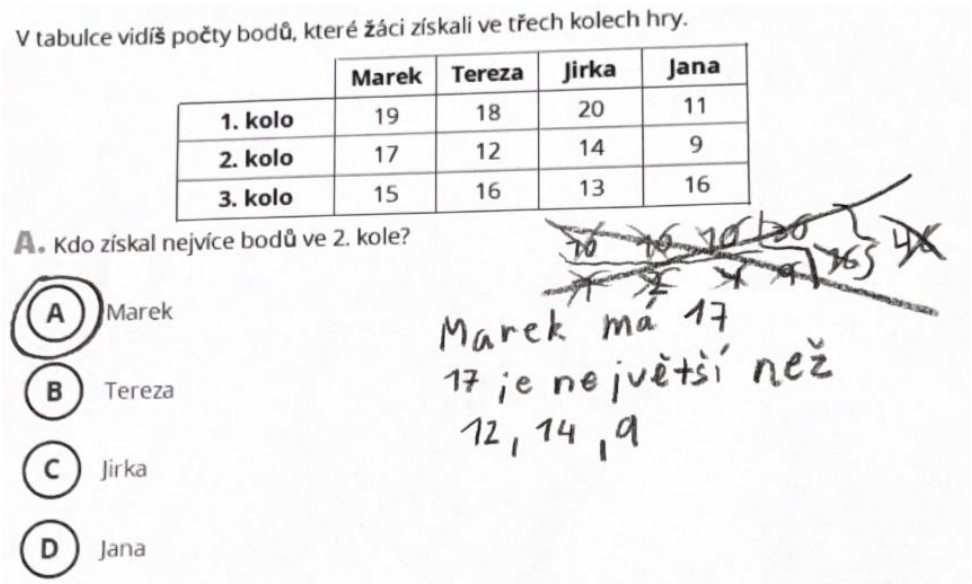
Žák na obrázku 2.9 počítá rozdíly mezi body získanými ve 3. kole a body získanými ve 2. kole (Marek –2, Jirka –1, Tereza +4, Jana +7). Jeho úvaha je tedy správná, ale závěr formuloval slovem nejméně místo méně.

OBRÁZEK 2.9 | Správná úvaha chyba ve formulaci závěru



Žák na obrázku 2.10.a nejdříve sčítal čísla v řádku 2. kola a zjišťoval, kolik bodů děti nahrály ve 2. kole. Sčítal je tak, že čísla rozložil na desítky (v prvním škrtnutém řádku) a jednotky (ve druhém škrtnutém řádku). Udělal jen tu chybu, že nepořádně zapsané první číslo 7 ve druhém řádku četl jako 1. Pravděpodobně pak hledal, kam má vložit odpověď, a přitom zjistil, že toto počítat nemá.

OBRÁZEK 2.10.a | Součet bodů ve 2. kole



V tabulce vidíš počty bodů, které žáci získali ve třech kolech hry.

	Marek	Tereza	Jirka	Jana
1. kolo	19	18	20	11
2. kolo	17	12	14	9
3. kolo	15	16	13	16

A. Kdo získal nejvíce bodů ve 2. kole?

(A) Marek
(B) Tereza
(C) Jirka
(D) Jana

Marek má 17
17 je největší než
12, 14, 9

Pro sečtení čísel v řádku 2. kolo se také rozhodl žák na obrázku 2.10.b.

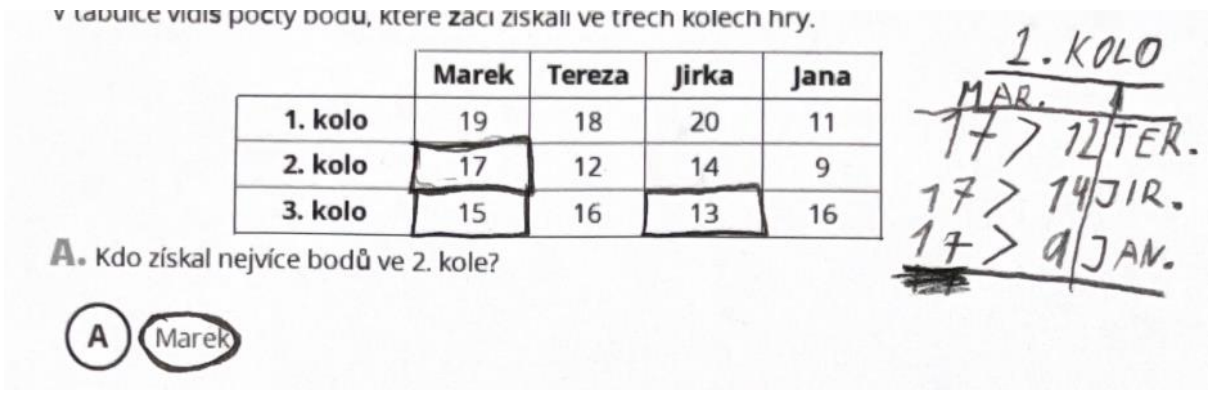
OBRÁZEK 2.10.b | Součet bodů ve 2. kole

počty bodů, které žáci získali ve třech kolech hry.

	Marek	Tereza	Jirka	Jana
1. kolo	19	18	20	11
2. kolo	17	12	14	9
3. kolo	15	16	13	16

Žáci byli vyzváni, aby svá řešení co nejpodrobněji zdůvodnili. Argumentační dovednosti jsou nedílnou součástí matematické gramotnosti žáka a svědčí o vyspělosti jeho myšlení. Porovnejte argumentace pěti žáků na následujících obrázcích 2.11.a–e.

OBRÁZEK 2.11.a | Porovnání čísel znakem



V tabulce vidíš počty bodů, které žáci získali ve třech kolech hry.

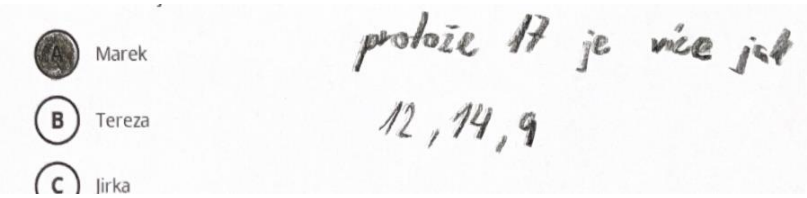
	Marek	Tereza	Jirka	Jana
1. kolo	19	18	20	11
2. kolo	17	12	14	9
3. kolo	15	16	13	16

A. Kdo získal nejvíce bodů ve 2. kole?

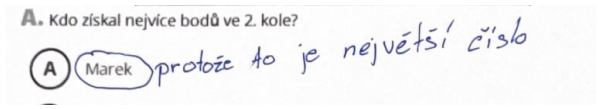
(A) Marek

1. KOLO
MAR.
17 > 12 TER.
17 > 14 JIR.
17 > 9 JAN.

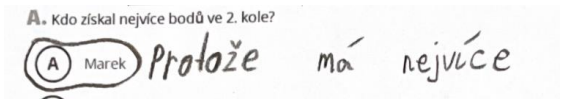
OBRÁZEK 2.11.b | Porovnání čísel slovně



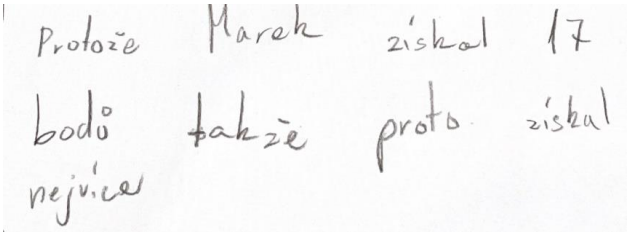
OBRÁZEK 2.11.c | Bez porovnání



OBRÁZEK 2.11.d | Argumentace kruhem

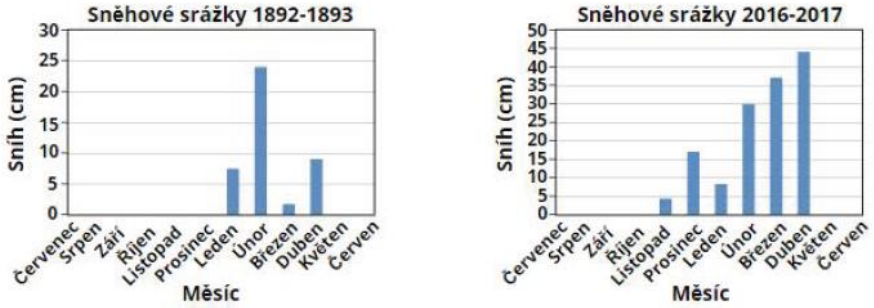


OBRÁZEK 2.11.e | Co je příčina a co důsledek?



Úloha 3 (ME71201)

Toto jsou sloupcové diagramy sněhových srážek v Zedlandu v letech 1892-1893 v porovnání s lety 2016-2017.



Julie si myslí, že v únoru 1893 bylo více sněhu než v únoru 2017.

Vysvětli, proč Julie nemá pravdu.

A priori analýza úlohy

Cílem úlohy je: Žák čte grafický záznam souboru dat v podobě sloupcového diagramu a získá z něj informace pro řešení problému.

Úloha je otevřená. Žák je vyzván, aby vysvětlil, proč je Juliino tvrzení nepravdivé.

Kontext úlohy je reálný a žáci asi již mají zkušenosti s údaji o srážkách, ale pravděpodobně spíše dešťových. Co se týče sněhu, spíše mají zkušenosti s údaji o výšce sněhové pokrývky. Text úlohy vysvětluje význam dvou diagramů na obrázku. Situace je lokalizovaná do fiktivní země Zedland. Tato informace je sice nadbytečná a pro řešení úlohy

nehraje žádnou roli, ale obvykle se země Zedland v úlohách TIMSS využívá proto, aby žádná účastnická země v šetření TIMSS neměla výhodu v tom, že její žáci si mohou vytvořit lepší představy podložené svými zkušenostmi. Fiktivní prostředí navíc umožňuje pracovat se situacemi a údaji, které nemusejí odpovídat realitě konkrétní země. Další informace se týká dvou časových intervalů, ve kterých se měření sněhových srážek konalo. Tyto časové údaje jsou od sebe vzdálené více než jedno století a také pro řešení úlohy nehrají roli. Smysl porovnání množství sněhu v daných časových obdobích není jasný a nepůsobí příliš motivačně. Pro řešení je důležité, že diagramy mají na svislé ose odlišná měřítka.

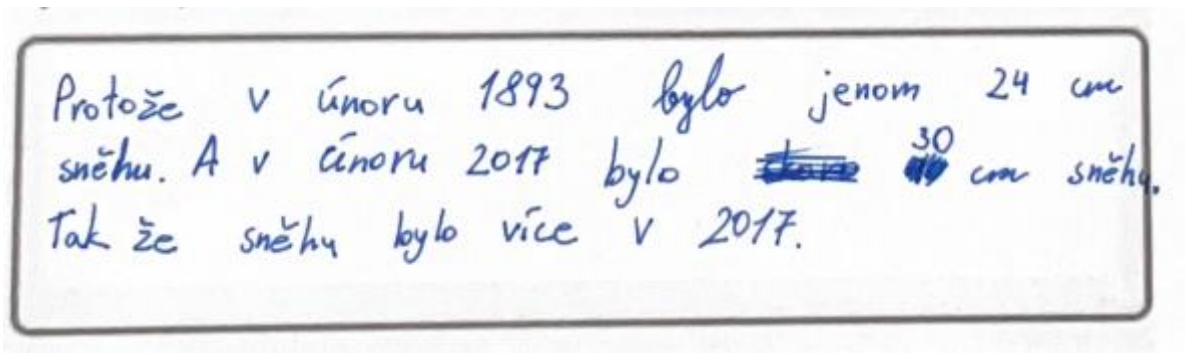
Lze předpokládat, že se žáci v běžném životě již setkali se sloupcovými diagramy, například při zveřejňování výsledků průzkumu volebních preferencí občanů, vývoje cen různých typů zboží, počtu obyvatel apod. Prezentace chybné myšlenky jejím vložením do mysli fiktivní žákyně Julie a argumentace, že myšlenka je chybná, není v učebnicích obvyklá úloha. Někdy se v učebnicích vyskytuje v podobě tzv. Concept Cartoons, které simulují komunikaci ve třídě pomocí obrázků postav žáků s bublinami u pusy s přímou řečí. Co však není obvyklé v životě, je posuzovat množství sněhu v dané chvíli jako úhrn sněhových srážek za předchozí dny či měsíce. Žáci jistě mají nějakou životní zkušenost, že vrstva sněhu po 14 dnech nikdy neodpovídá naměřenému množství srážek, neboť záleží na tom, jak bylo teplo, jaký sníh napadl apod. Můžeme se ale domluvit, že do úvah o situacích v zemi Zedland nemůžeme vždy promítat naše životní zkušenosti.

Aby mohl žák srozumitelně zdůvodnit nepravdivost tvrzení Julie, potřebuje se nejdříve sám v situaci zorientovat a přesvědčit se, že tvrzení Julie je skutečně nepravdivé. Vysvětlit, proč Julie nemá pravdu, znamená popsat, jak Julie uvažovala, a označit místo, kde její úvahy nejsou správné.

Žák při řešení úlohy pracuje se dvěma sloupcovými diagramy, na kterých jsou na vodorovné ose uvedeny všechny měsíce od července jednoho roku do června následujícího roku. Časové jednotky jsou stejně dlouhé. Množství sněhových srážek v jednotlivých měsících je uvedeno na svislé ose. Dílky na svislých osách představují v obou diagramech 5 cm sněhových srážek, jejich délka je však v prvním diagramu větší než ve druhém. Žáci obvykle nemívají problémy s vyhledáváním údajů ze sloupcového diagramu. Problém v řešení úlohy spíše spočívá, jako u všech úloh spojených se čtením textového zadání, v porozumění úkolu. Matematické hledisko úlohu nijak nezatěžuje, jde pouze o porovnávání dvou přirozených čísel, 24 (25) a 30, popřípadě 31 a 60, což je úroveň druhého ročníku. Důležité je však si všimnout různých měřítek svislých os, nikoli jen absolutní výšky sloupců.

Žák má za úkol interpretovat sdělení, že *v únoru 1893 bylo více sněhu než v únoru 2017*, a posoudit, jak množství sněhu v únoru souvisí s množstvím sněhových srážek v jednotlivých měsících. Může usoudit, že žádný sníh neroztál ani se neslehl a že množství sněhu je rovno úhrnu sněhových srážek do února. Tedy v roce 1893 to je 7 + 24 = 31 cm a v roce 2017 je to 5 + 17 + 8 + 30 = 60, což je více a což také znamená, že takhle Julie neuvažovala. Nebo žák usuzuje, že úloha se ptá pouze na únor, a porovná pouze sloupce v únoru jako na obrázku 3.1.

OBRÁZEK 3.1 | Množství sněhu v únoru



Na levém diagramu je sloupec únor vyšší než sloupec únor na pravém diagramu, ačkoliv levý sloupec představuje vzhledem k rozdílným měřítkům svislých os méně sněhu než pravý. Aby Julie mohla tvrdit, že *v únoru 1893 bylo více sněhu než v únoru 2017*, musela si všímat pouze výšky sloupců, nikoli hodnot, které sloupce ukazují. Takto Julie pravděpodobně uvažovala a toto bylo úkolem odhalit.

Komplikující jevy při řešení úlohy pro žáky

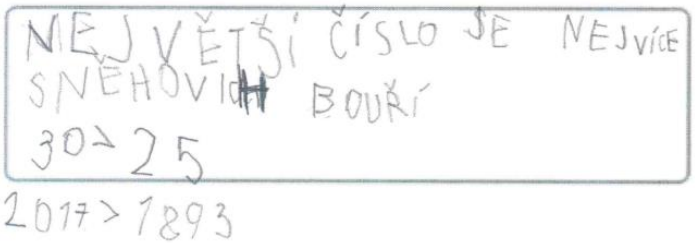
Některé jevy v zadání úlohy, které mohou žákům komplikovat porozumění a řešení, bylo možné očekávat již při přečtení zadání úlohy. Další se vynořily až při analýzách žákovských řešení. Při analýze takového řešení, které bylo mimo naše očekávání, jsme si vždy kladli otázku: Jak asi žák přemýšlel, jak asi porozuměl zadání úlohy, když odpověděl takto?

Jevy komplikující porozumění úloze rozdělíme do tří skupin podle toho, zda souvisejí s jazykem, kontextem, nebo grafickým zpracováním dat.

- hledisko jazykové

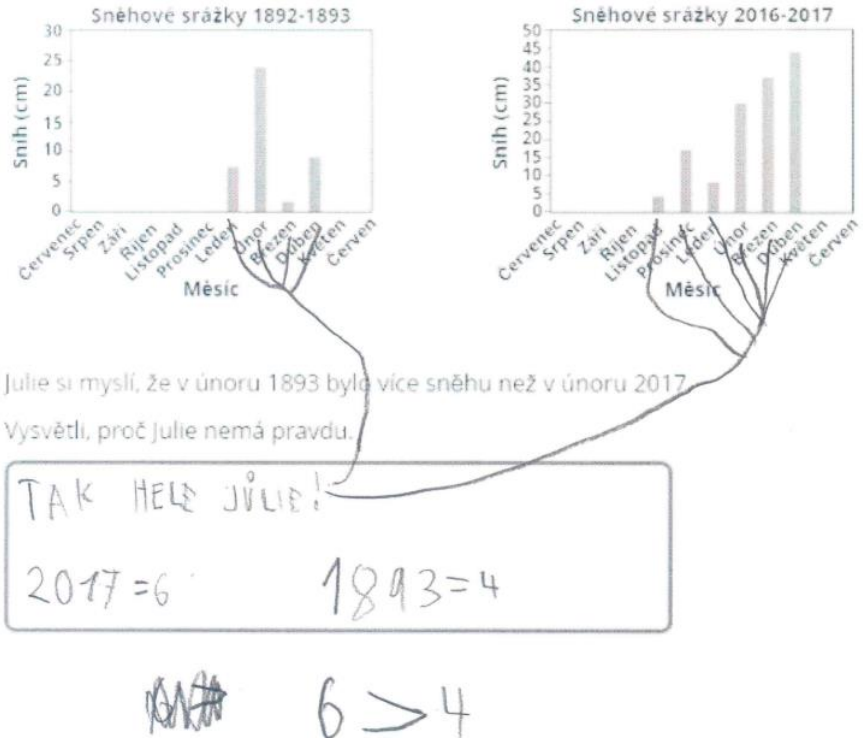
- **porozumění výrazu *sněhové srážky***. Tento výraz se v běžném životě používá velice málo, spíše se slovo srážky používá v souvislosti s deštěm. V souvislosti se sněhem se používají obraty jako např. *v noci napadlo 5 cm sněhu*, *výška sněhové pokrývky je 10 cm* apod. Na obrázku 3.2 žák obratu *sněhová srážka* rozuměl jako *sněhová bouře*. To ho vedlo k tomu, že čísla vedle svislé osy vnímal jako počty a nikoliv jako veličiny, tedy výšku sněhu v cm.

OBRÁZEK 3.2 | Sněhové bouře



- **porozumění úkolu.** Žák na obrázku 3.2 řešil úlohu a nereagoval na Julii. Žák na obrázku 3.3 si interpretoval svůj úkol tak, že má vysvětlení adresovat Julii. To samozřejmě samo o sobě za chybu nelze počítat, jen je to pro učitele signál upozorňující na nedostatky ve čtení s porozuměním. Chybné je porozumění obratu *více sněhu*, které žák vnímal jako **počet měsíců**, ve kterých padal sníh. Požadavek na měsíc únor žák neudržel ve své krátkodobé paměti. Z toho je patrné, že interpretace úkolu pro žáka představovala značnou kognitivní zátěž.

OBRÁZEK 3.3 | Vysvětlení Julii



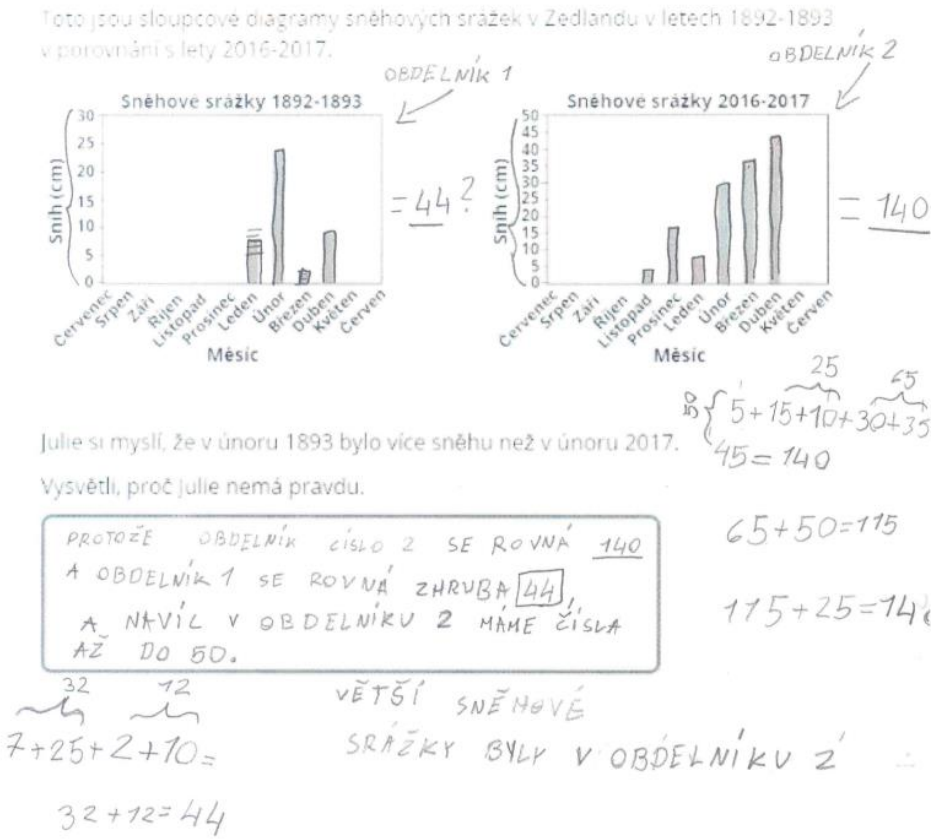
- hledisko kontextu

- **nesourodost informací.** Jak bylo výše uvedeno, informace v textu a v diagramu nejsou zcela v souladu, což umožňuje různou interpretaci úkolu. V grafickém zadání úlohy jsou údaje o **sněhových srážkách** v jednotlivých měsících, ale Julie uvažuje o **množství sněhu**. Někdo může mít zkušenost, že přes noc napadlo hodně sněhu, ale ten přes den zase roztál. Čili údaj o výšce sněhové pokrývky, a tedy o množství sněhu, nemusí nutně odpovídat údaji o tom, kolik sněhu napadlo.

Také je možné situaci porozumět tak, že všechen sníh, který do konce února napadl, zůstal ležet, a že se tedy mají sčítat sněhové srážky za všechny měsíce až do února. Výsledek by to v tomto případě sice nezměnilo, ale změnilo by to argumentaci. Jednou porovnáváme čísla 24 a 30 a podruhé porovnáváme čísla 31 (7 + 24) a 60 (5 + 17 + 8 + 30). V národním šetření se vyskytla i odpověď žáka, který o srážkách v předchozích měsících uvažoval: *Protože bylo hodně sněhu už před tím.*

Jestliže žák nerozumí situaci, často si úkol převede do situace, se kterou má již nějakou zkušenost, a opomíjí některé údaje či požadavky úlohy. Žák na obrázku 3.4 počítal úhrn sněhových srážek za celý rok, což vyjádřil obratem *v obdélníku*. Je otázkou, zda příčinou tohoto uchopení byl nedostatek ve čtení s porozuměním, nebo v porozumění popisované situaci vyplývající z nejasnosti textu. Zajímavé je podívat se na jeho způsob sčítání více čísel, které může signalizovat nejistotu a menší kapacitu pracovní paměti, neboť sčítal čísla postupně po dvou a dílčí součty si zapisoval. Žák si byl pravděpodobně svého problému při sčítání více čísel vědom a aby se vyhnul početní chybě, volil tuto strategii.

OBRÁZEK 3.4 | Celý rok

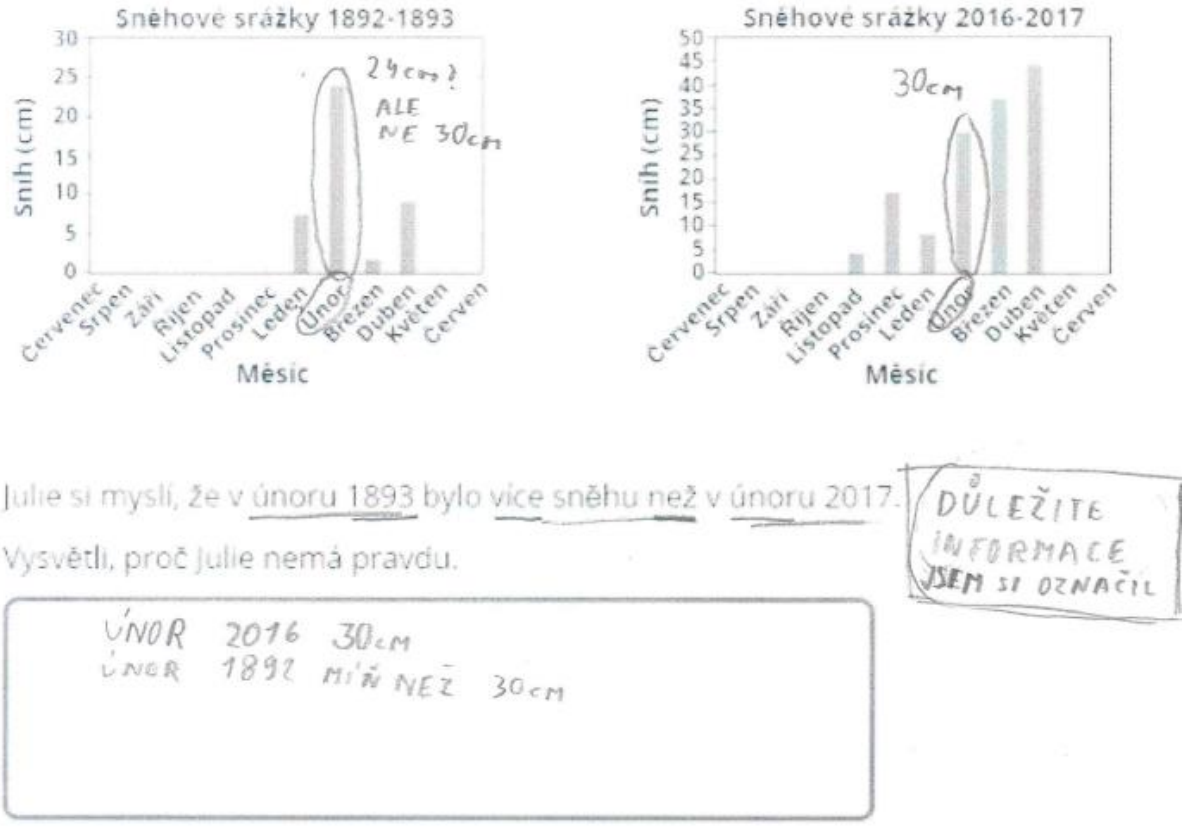


- Nesourodost informací a z toho plynoucí **neporozumění zadání** úlohy často vede žáky k **volbě povrchové strategie**. To je strategie, kterou má žák již nacvičenu z předchozích řešení problémů. V národním šetření se dokonce vyskytla odpověď … *má 3910*. Letopočty jsou jediná čísla v textu, slovo *více* signalizuje operaci sčítání, tedy žák volil strategii *Sečtu čísla, která v textu úlohy vidím*.

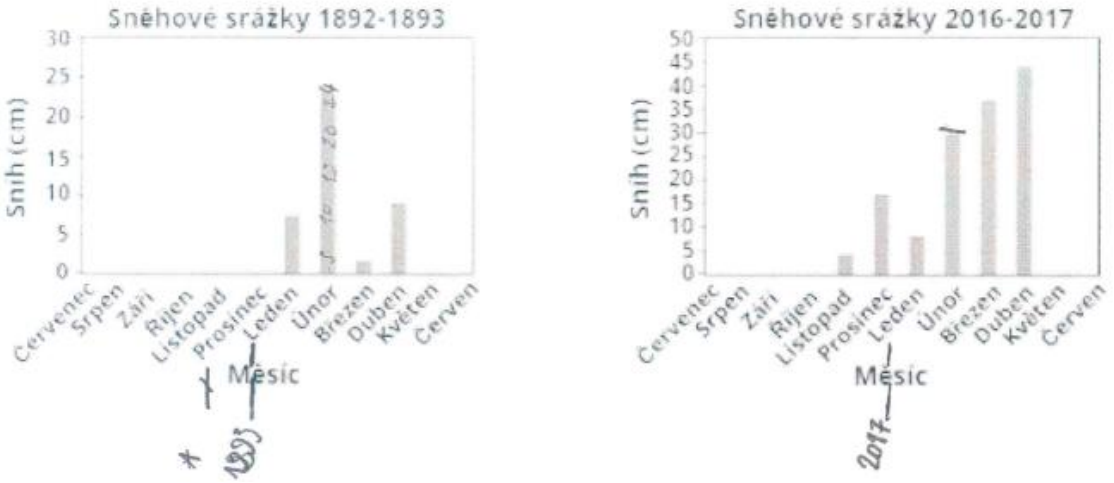
Na obrázku 3.5 žák volil pro zajištění porozumění textu cestu podtržení důležitých informací. Ty pak vyznačil v diagramech a správně argumentoval, i když poněkud stručně. Určitě je zajímavé si všimnout, že ve svém řešení žák uvedl jiné roky, 2016 a 1892, než si v textu podtrhnul. Pravděpodobně proto, že ten letopočet je uveden přímo nad

sloupcem únor. Asi si tento žák ani neuvědomil, že mezi prosincem a lednem se letopočet mění, jako např. žák na obrázku 3.6.

OBRÁZEK 3.5 | Podtrhávání důležitých informací

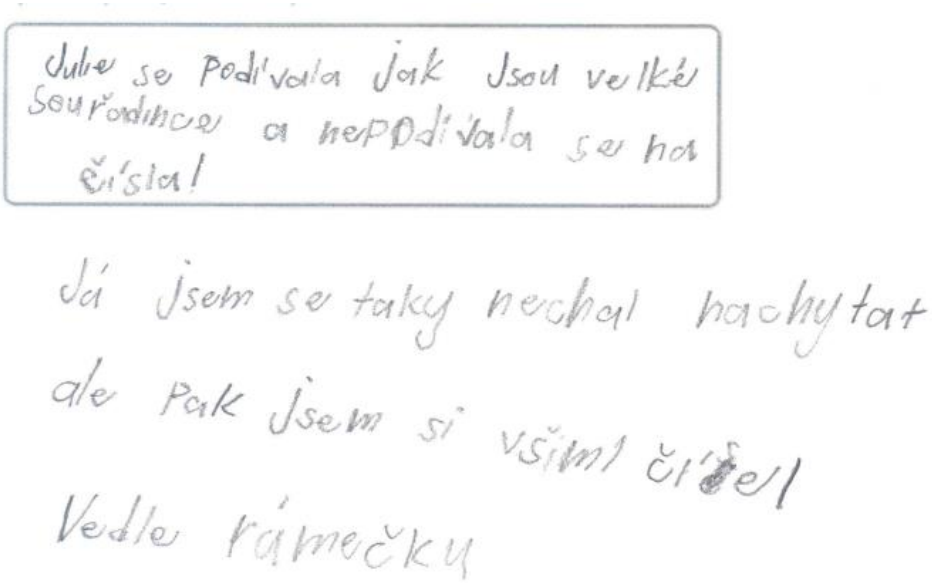


OBRÁZEK 3.6 | Změna letopočtu



Někteří učitelé vedou své žáky k tomu, aby při práci s chybou nejen chybu **odhalovali**, ale také **popisovali její příčiny**, i když chybu udělal spolužák. Na obrázku 3.7 žák popisuje příčinu chybné úvahy Julie. Slovem souřadnice pravděpodobně myslí výšku sloupce. Taková odpověď přesně reaguje na výzvu v zadání úlohy.

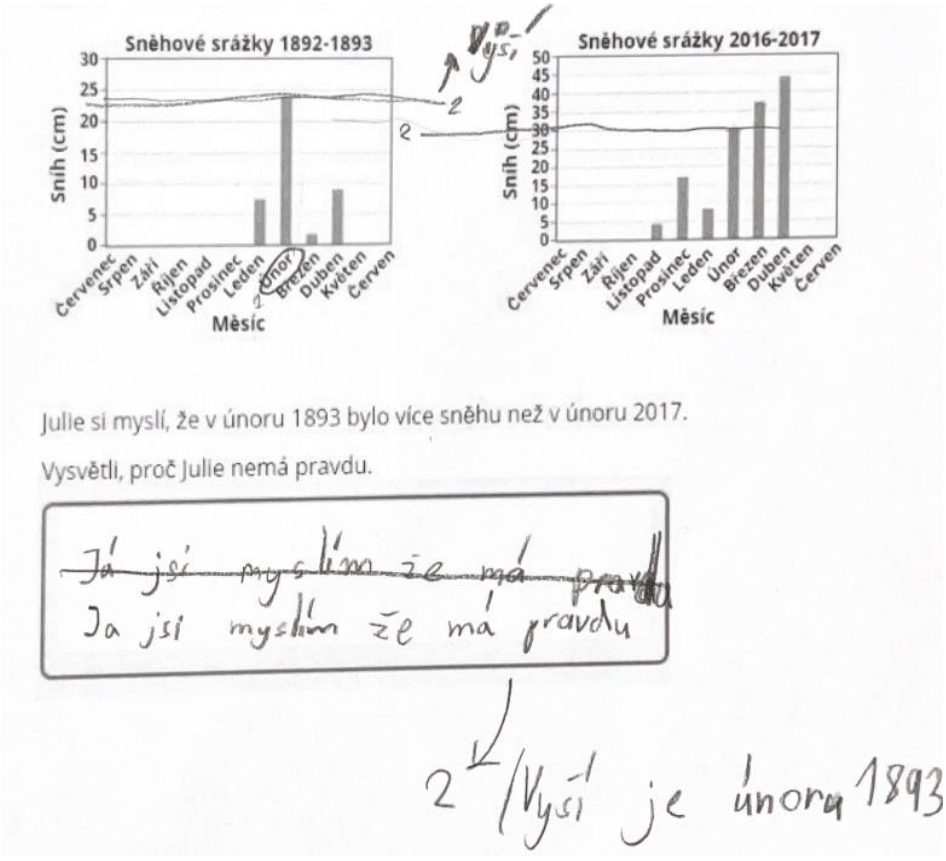
OBRÁZEK 3.7 | Příčina chyby



- hledisko grafického zpracování dat

- nestejná měřítka svislých os. Údaje o množství sněhu v porovnávaných dvou letech jsou zpracovány stejným způsobem – sloupcovým diagramem, který je dobře srozumitelný. Jen s odlišnými měřítky na svislých osách. Čili ten, kdo porovnává výšku příslušných sloupců pouze vizuálně, dojde k chybnému řešení stejně jako Julie, viz obrázky 3.8 a 3.9.

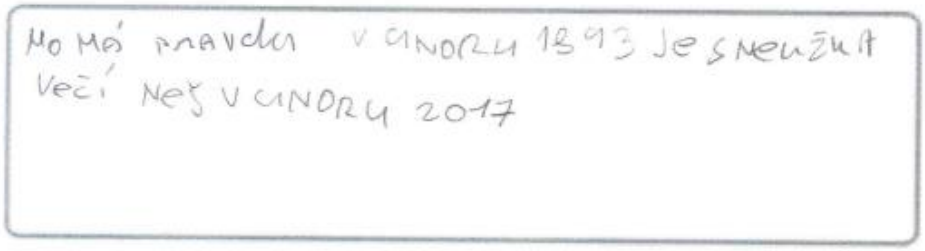
OBRÁZEK 3.8 | Výška sloupců v únoru I



OBRÁZEK 3.9 | Výška sloupců v únoru II

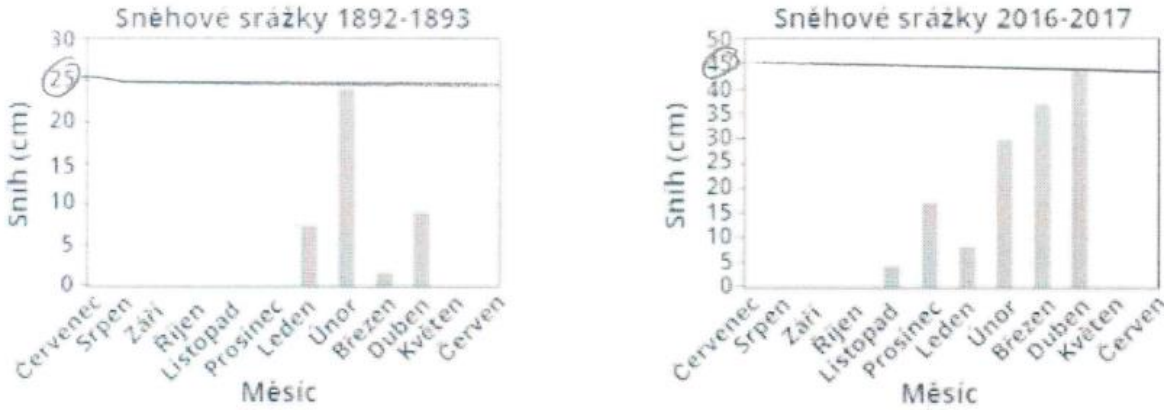
Julie si myslí, že v únoru 1893 bylo více sněhu než v únoru 2017.

Vysvětli, proč Julie nemá pravdu.



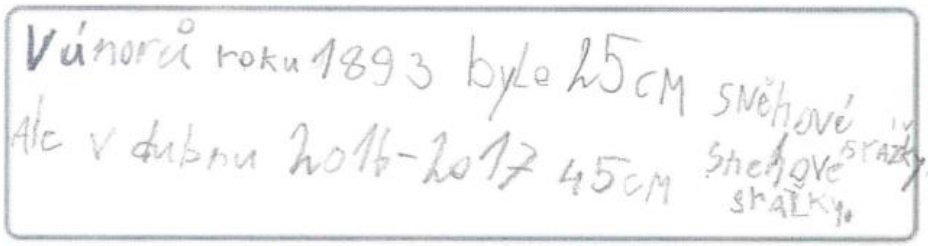
- Důsledek **nedostatečné zkušenosti s prací se sloupcovými diagramy** nebo **stereotypní řešení** obdobných úloh ve škole také často vede k tomu, že žák šetří svou kognitivní energii a při prvním pohledu na úlohu si vzpomene na svou dosavadní zkušenost, která s danou úlohou souvisí, a té přizpůsobí své porozumění. Z toho důvodu žáci na obrázcích 3.10, 3.11 a 3.12 porovnávali nejvyšší sloupce v obou diagramech.

OBRÁZEK 3.10 | Porovnání nejvyšších sloupců I

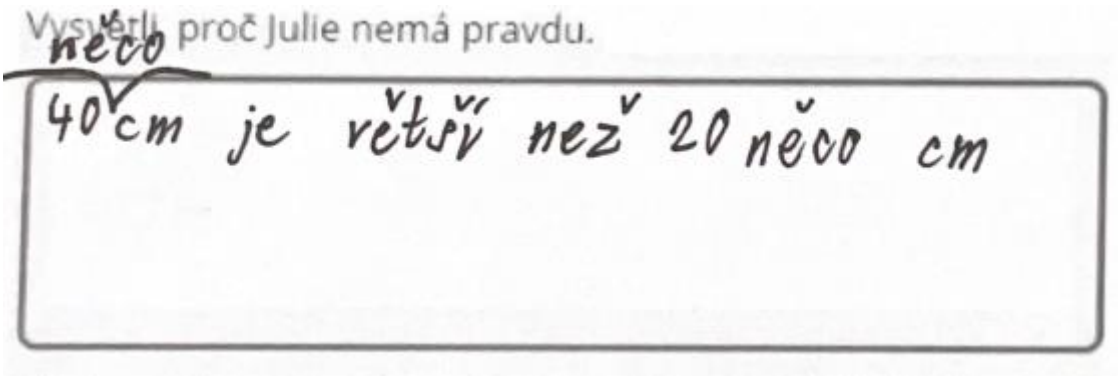


Julie si myslí, že v únoru 1893 bylo více sněhu než v únoru 2017.

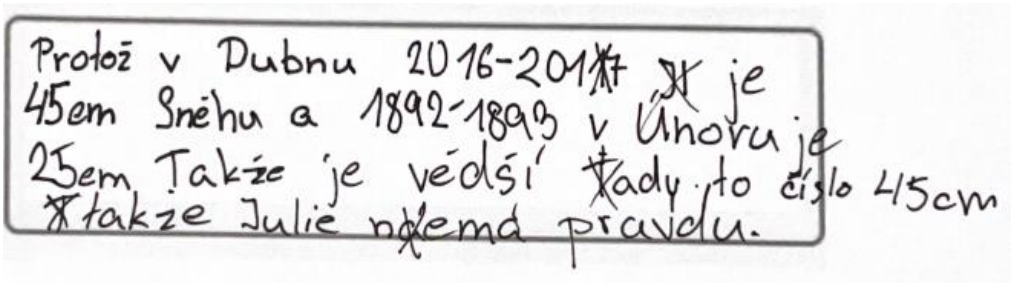
Vysvětli, proč Julie nemá pravdu.



OBRÁZEK 3.11 | Porovnání nejvyšších sloupců II

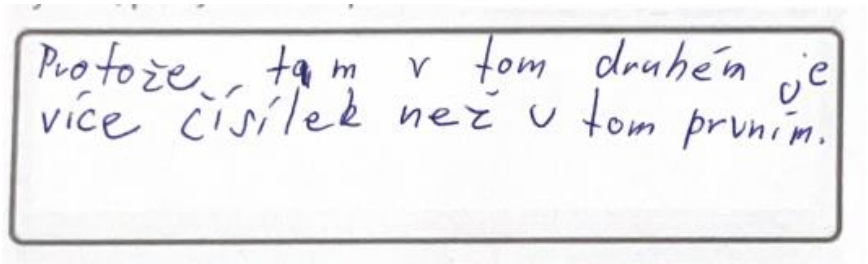


OBRÁZEK 3.12 | Porovnání nejvyšších sloupců III

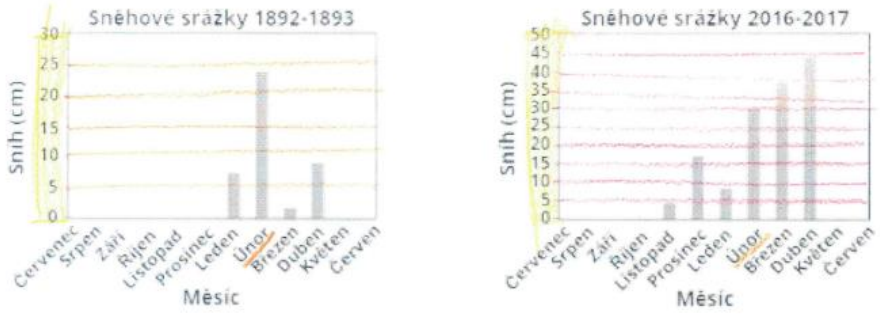


Argumentace je jednou z nejdůležitějších aktivit ve výuce matematiky, která rozvíjí myšlení, ale také jednou z nejnáročnějších. Obvykle jasná formulace argumentace odráží jasné myšlenky a naopak (například obrázek 3.13). Většina žáků zdůvodňovala nepravdivost tvrzení Julie tím, že uvedli správné řešení. Někteří se pokoušeli jít hlouběji do příčiny chybné úvahy Julie a uvedli různá měřítka na svislých osách jako příčinu chybného tvrzení Julie. Žák na obrázku 3.13 vnímal různá měřítka na svislých osách obou diagramů a tušil, že to je příčinou, proč Julie nemá pravdu. Argument však formuloval ne zcela jasně. Zde by mohl učitel podpořit kultivaci formulací myšlenky výzvami: *Vyznač na prvním diagramu například, že v prosinci napadlo 30 cm, stejně jako v únoru na druhém diagramu. Je ten sloupec vyšší, nebo nižší než na druhém diagramu v únoru? Proč? Když vyznačíme na druhém diagramu stejně vysoký sloupec, jako je 30 cm na prvním diagramu, kolik cm sněhu to bude znázorňovat? Vyznač na obou diagramech, že například v říjnu napadl 1 cm sněhu. Ve kterém diagramu bude sloupec vyšší? Proč?* Jasněji formulovali argumenty žáci na obrázcích 3.14, 3.15 a 3.16.

OBRÁZEK 3.13 | Nejasná argumentace

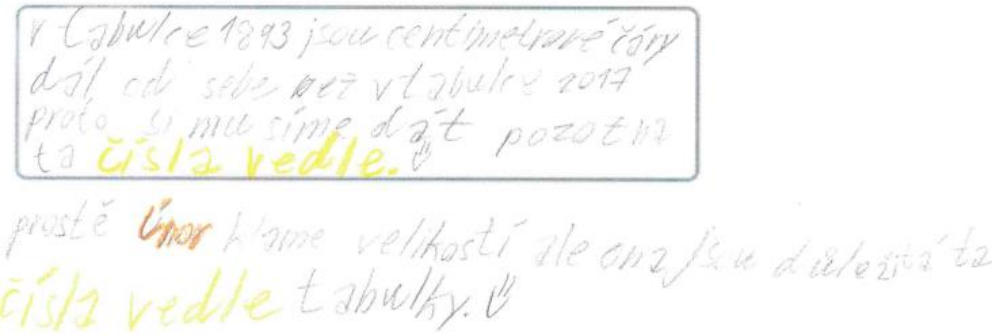


OBRÁZEK 3.14 | Argumentace



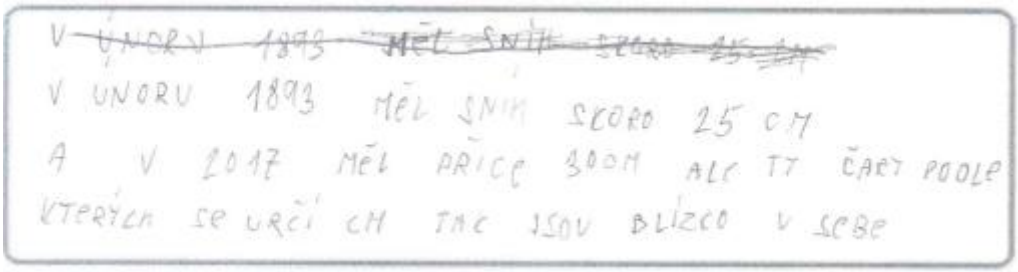
Julie si myslí, že v únoru 1893 bylo více sněhu než v únoru 2017.

Vysvětli, proč Julie nemá pravdu.

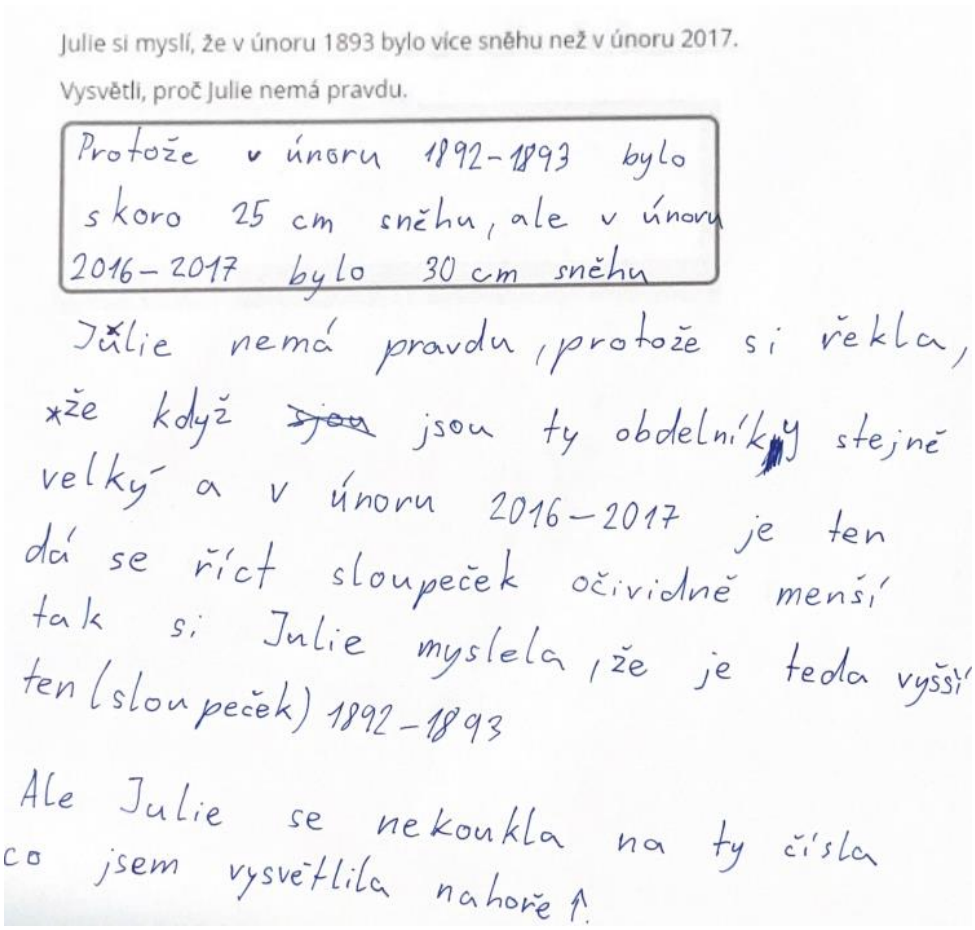


„V tabulce 1893 jsou centimetrové čáry dál od sebe než v tabulce 2017 proto si musíme dát pozor na čísla vedle. Prostě únor klame velikostí, ale ona jsou důležitá čísla vedle tabulky.“

OBRÁZEK 3.15 | Nestejná měřítka svislé osy



OBRÁZEK 3.16 | Příčina



Výsledky

V tabulce 3 uvádíme výsledky z národního a našeho šetření. Četnost výsledků je uvedena v hranatých závorkách v procentech.

TABULKA 3

	Počet správných odpovědí	Počet chybných odpovědí	Celkem	Neřešeno
ČR	129 [17,7]	598 [82,3]	727	244
P	31 [75,6]	10 [24,4]	41	0

Podle návodu na vyhodnocování žákovských odpovědí byla považována za správná řešení například tato:

- Vysvětlí, že stupnice v diagramech jsou různé (například viz obrázky 3.7, 3.13, a výborně to popisuje žák na obrázku 3.14), NEBO uvede správné hodnoty pro únor pro oba roky (pro únor 1893 se uznává 24 i 25 a pro únor 2017 se uznává pouze 30).

Příklady:

- *Druhý diagram ukazuje až do 50, takže hodnoty vypadají menší. 24 cm v roce 1893 a 30 cm v roce 2017.*
- *Mezery mezi čarami jdoucími po 5 cm jsou v druhém diagramu menší* (například na obrázku 3.13).

Za nesprávné odpovědi byly hodnoceny například:

- *Diagram pro roky 2016–2017 má větší čísla* – výslovně neodkazuje na měřítko.
- *Nemá pravdu, protože v únoru 2016–2017 bylo jenom 30* – udává správnou hodnotu pouze pro jeden rok.
- *Množství sněhu v roce 1893 je těsně pod 25, zatímco v roce 2017 je to těsně nad 35* – udává správnou hodnotu pro jeden rok a nesprávnou hodnotu pro rok druhý.

Jak jsme již uvedli, není vhodné srovnávat četnost správných odpovědí našich žáků s četností správných odpovědí žáků v národním šetření, protože naši žáci pracovali ve zcela jiných podmínkách. Přesto tyto údaje uvádíme z důvodu inspirace pro učitele, který může zadat tyto uvolněné úlohy z TIMSS 2023 svým žákům jako diagnostiku své třídy a porovnat svá řešení se zde předloženými řešeními. Vyšší chybovost v národním šetření jsme zdůvodnili množstvím komplikujících jevů, limitovaným časem na řešení a kognitivní zátěží dalšími úlohami.

Z tabulky to není patrné, ale 32 našich žáků (78 %) interpretovalo svůj úkol tak, že mají porovnat množství sněhu pouze v únoru ve dvou letech, přičemž množství srážek považovali za výšku sněhu. Pouze 2 žáci počítali i se sněhovými srážkami do února, 2 žáci uvažovali o počtu měsíců, kdy padal sníh (obrázek 3.3), a 4 žáci porovnávali nejvyšší sloupce obou diagramů (např. obrázek 3.10). To bylo samozřejmě hodnoceno jako chybné řešení. Pouze 3 žáci zdůvodnili, proč Julie nemá pravdu, tím, že popsali, kde asi Julie udělala chybu ve svých úvahách. Ostatní zdůvodnili nepravdivost tvrzení Julie tím, že uvedli správné řešení.

Úloha 4 (ME71175A, ME71175B, ME71175C)

Žáci ve třídě vyráběli tři různé skládačky zvířátek, použili k tomu modrý, červený a žlutý papír. V tabulce je uvedeno, kolik zvířátek udělali z každého barevného papíru.

	Barevný papír		
Zvíře	**Modrý**	**Červený**	**Žlutý**
Želva	8	4	3
Žirafa	3	2	10
Ryba			

Doplň tabulku podle těchto pravidel:

- Modrých ryb je stejný počet jako žlutých žiraf.
- Červených ryb je stejný počet jako dvou zbývajících červených zvířátek dohromady.
- Žlutých zvířátek je celkem 24.

A priori analýza úlohy

Cílem úlohy je: Žák se orientuje v záznamu dat organizovaných do dvouparametrické tabulky, vyhledá informace pro řešení problému a podle popsaných vazeb chybějící data do tabulky doplní.

Cíl úlohy je obdobný jako v úloze 2, a sice diagnostikovat žákovu dovednost orientovat se ve dvouparametrické tabulce, kde jeden parametr je barva papíru, ve vodorovném záhlaví, a druhý parametr je tvar skládačky, ve svislém záhlaví. V tabulce je evidováno, kolik skládaček z papíru jisté barvy a jistého tvaru žáci z jedné třídy udělali. Poslední řádek tabulky není doplněn. Dovednost orientovat se v tabulce žák prokáže tím, že chybějící čísla v dolním řádku doplní na základě popisu vazby chybějícího čísla a jiného, případně jiných čísel v tabulce, které vyhledá. Například v okně modrá ryba má být stejné číslo jako v okně žlutá žirafa, tedy 10. V poli červená ryba je třeba doplnit číslo, které je stejné jako součet všech zbývajících červených skládaček, tedy 6 (4 + 2). Do pole žlutá ryba je potřeba doplnit číslo tak, aby dohromady s čísly 10 a 3 dalo 24, tedy 11.

Kontext úlohy je blízký žákovým zkušenostem. Například z evidence ve třídě, kdo si objednává jakou knížku z nabídky, kdo volí jaký výlet, kdo kde byl na prázdninách apod. Úvodní text popisuje kontext úlohy jasně. Dvouparametrická tabulka 3 × 3, tři barvy a tři tvary skládačky, je také jasná. Úkoly jsou postupně gradované podle obtížnosti. Číslo, které se má doplnit do prvního okna v posledním řádku, se váže na jedno pole, číslo ve druhém poli je dáno jako součet čísel ve dvou polích nad ním a třetí pole je také vázáno na dvě pole nad ním, ale tak, že je dán celkový součet všech tří polí ve sloupci.

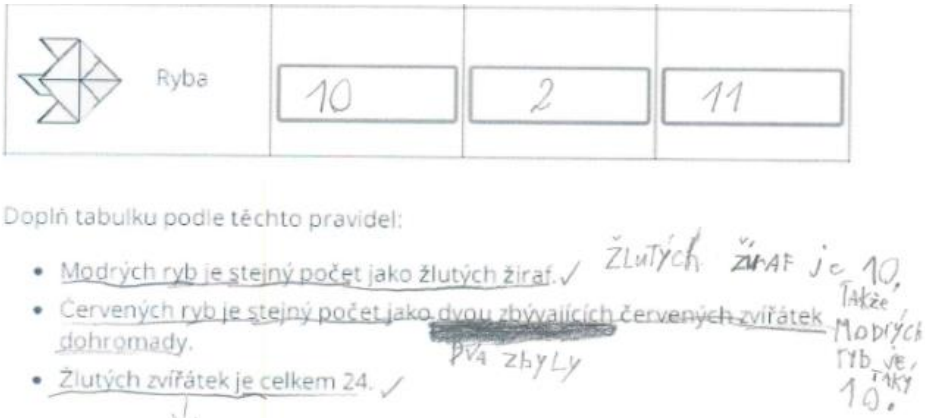
Komplikující jevy při řešení úlohy pro žáky

Žák bude používat pouze početní operace sčítání a popřípadě odčítání malých přirozených čísel. Z hlediska matematiky žádnou komplikaci neočekáváme. Neporozumění kontextu také neočekáváme. Tedy komplikace může pramenit pouze z neporozumění v důsledku nedostatku ve čtení s porozuměním a z problémů v orientaci v tabulce, což je podstata úlohy.

- porozumění obratu „dvou zbývajících“

Druhá podúloha je srozumitelná tomu, kdo si dobře představí situaci. Jinak formulace … *počet jako dvou zbývajících červených zvířátek dohromady* nabízí i odpověď, že dvě zbývající červená zvířátka dohromady jsou dvě, a tedy dvě je i počet červených ryb. To vidíme na obrázku 4.1, kde žák navíc obratu *dvě zbývající* rozumí jako *dvě zbylá*.

OBRÁZEK 4.1 | Dva zbyly



Výsledky

V tabulce 4A uvádíme souhrn výsledků první podúlohy, v tabulce 4B druhé podúlohy, v tabulce 4C třetí podúlohy a v tabulce 4D celkové výsledky. V hranaté závorce je uvedena četnost daných odpovědí v procentech. V řádku ČR jsou uvedeny výsledky celostátního šetření, v řádku P (pilotáž) výsledky z našeho šetření.

TABULKA 4A

A	Počet správných odpovědí – 10	Počet chybných odpovědí	Celkem	Neřešeno
ČR	436 [50,7]	424 [49,3]	860	111
P	39 [95,1]	2 [4,9]	41	0

Ve skupině P se vyskytla chybná odpověď 3 dvakrát.

TABULKA 4B

B	Počet správných odpovědí – 6	Počet chybných odpovědí	Celkem	Neřešeno
ČR	569 [67,4]	275 [32,6]	844	127
P	38 [92,7]	3 [7,3]	41	0

Všichni tři žáci, kteří zde chybovali, měli problém s porozuměním obratu „ve dvou zbývajících“. Každý žák jinak interpretoval význam slova zbývající, dva z nich však byli s odlišným mateřským jazykem – obrázky 4.1, 4.3, 4.4.

TABULKA 4C

C	Počet správných odpovědí – 11	Počet chybných odpovědí	Celkem	Neřešeno
ČR	399 [47,3]	445 [52,7]	844	127
P	40 [97,6]	1 [2,4]	41	0

Jediná chyba byla 9, kdy žák udělal početní chybu $24 - 13 = 9$.

TABULKA 4D

Celkově	Všechny odpovědi správné	Jedna nebo dvě části správné	Všechny odpovědi chybné	Celkem	Neřešeno
ČR	278 [32,1]	388 [44,8]	200 [23,1]	866	105
P	35 [85,4]	6 [14,6]	0	41	0

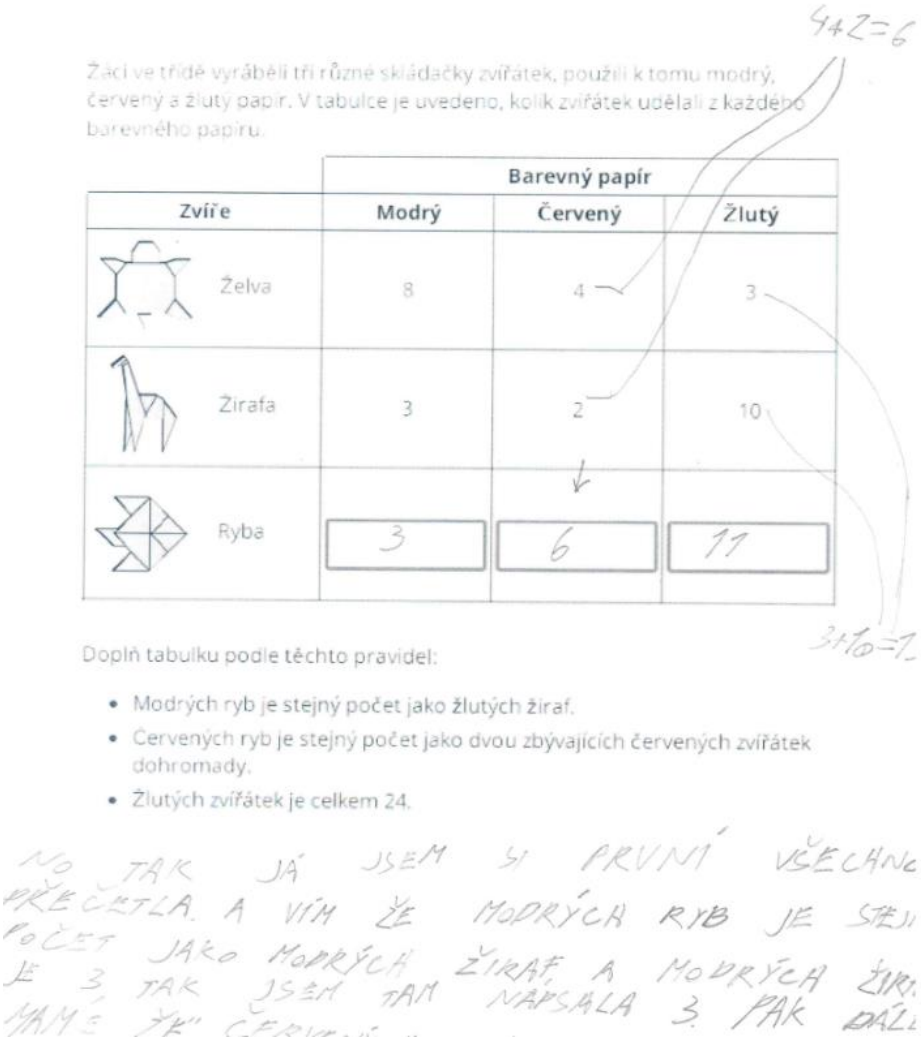
Z tabulek je patrné, že v této úloze naši žáci chybovali minimálně.

Ukázky konkrétních žákovských řešení

Chyba v první podúloze

Na obrázku 4.2 žákyně napsala, že hledá počet modrých, nikoliv žlutých žiraf. To se pravděpodobně nestalo v důsledku neporozumění, ale z důvodu nedostatečné pracovní kapacity žákyně. Měla za úkol zjistit počet modrých ryb, zaměřila pozornost na sloupec modrý a v něm hledala počet žiraf. Informace o barvě žluté byla vytěsněna modrou. Také je možné, že si žákyně nejdříve přečetla všechny úkoly a viděla, že vyhledávání potřebných informací ve druhé a třetí podúloze se děje vždy ve stejném sloupci, jako je doplňované pole, a tuto zkušenost přenesla i do první podúlohy.

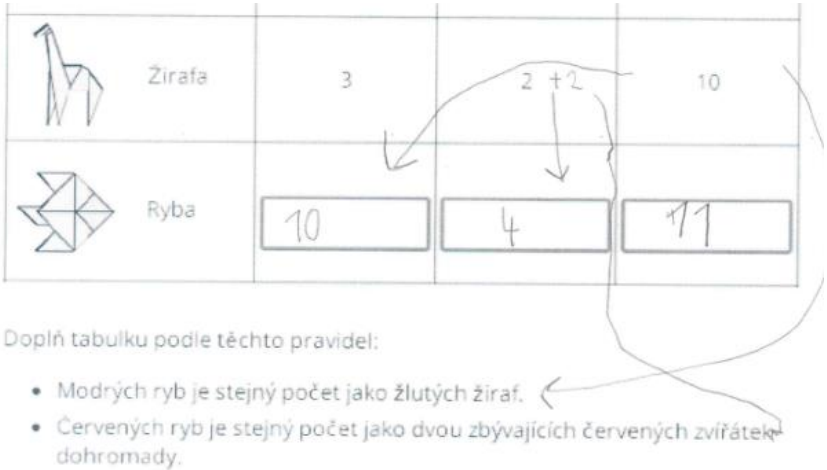
OBRÁZEK 4.2 | Modré žirafy



Chyba ve druhé podúloze

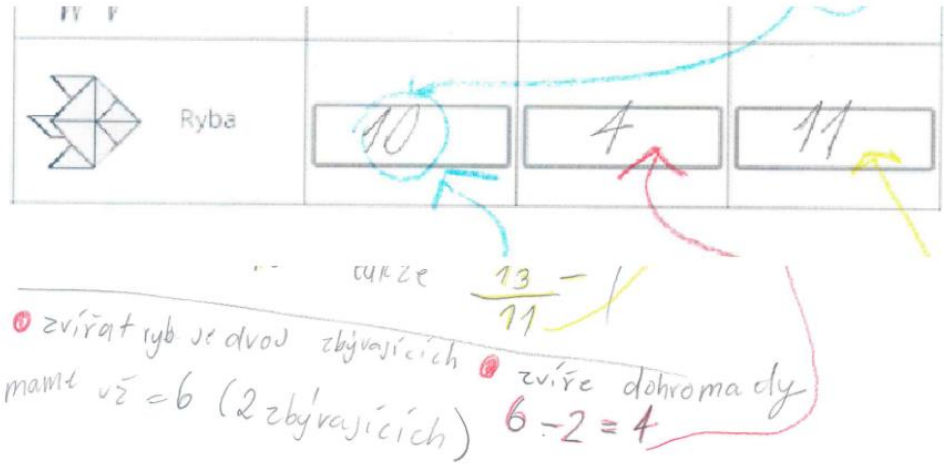
Na obrázku 4.3 žák přičetl 2, což byly pravděpodobně ty „dvě zbývající“, k počtu červených žiraf. Můžeme spekulovat, že z předchozí úlohy měl propojen počet ryb a žiraf.

OBRÁZEK 4.3 | Další dvě červená zvířátka



Z obrázku 4.4 je patrné neporozumění významu slova zbylých u žáka s odlišným mateřským jazykem.

OBRÁZEK 4.4 | Dva zbývající



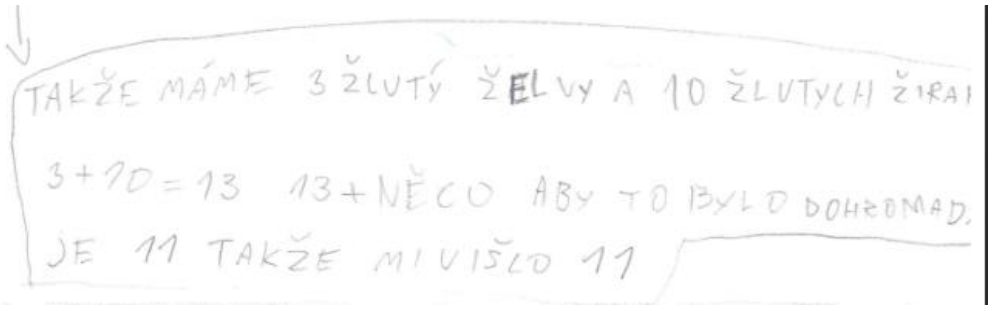
Řešení třetí podúlohy – znaky pro neznámou

Obrázky 4.5–4.8 uvádíme na ukázku toho, jak si žáci zapsali neznámou v řešení třetí podúlohy.

Na obrázku 4.5 žák zapsal neznámou ve vztazích mezi danými a hledanými údaji slovně jako „něco“, na obrázku 4.6 jako „?“, na 4.7 jako „zbytek“, na 4.8 jako „□“.

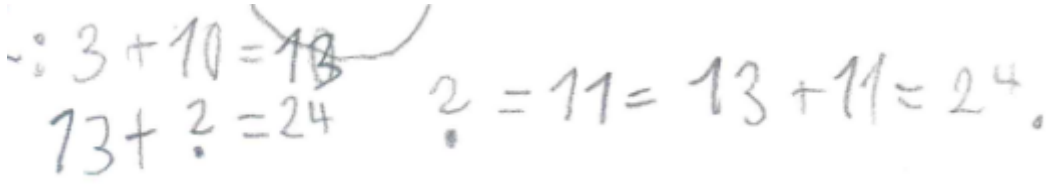
Agramatismus, kterého se žáci dopustili v matematice (např. na obrázcích 4.5 a 4.7), vypovídá často o energetickém nasazení žáka.

OBRÁZEK 4.5 | Něco je neznámá

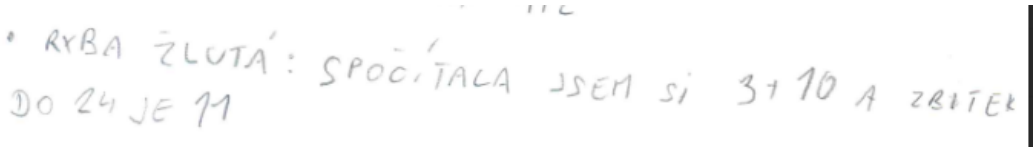


Na obrázcích 4.6 a 4.8 se objevuje běžná chyba v zápisu rovnosti při řetězení výpočtů. Obvykle se to stává v důsledku procesuálního porozumění znaku pro rovnost „=“, tzn. „počítám zleva doprava a za rovnítko napíši výsledek“. Zápis 10 + 3 = 13 + □ = 24 je myšlenkově správný, ovšem formální zápis správný není. Proto je těžké žákům vysvětlovat příčinu chyby. Účinný postup, jak žáky přivést k tomu, že nemůžeme takové zápisy nechat na tabuli nebo v písemné práci, je, že zakryjeme poslední číslo (10 + 3 = 13 + □) nebo prostřední výraz (10 + 3 = 24) a necháme posoudit pravdivost zápisu.

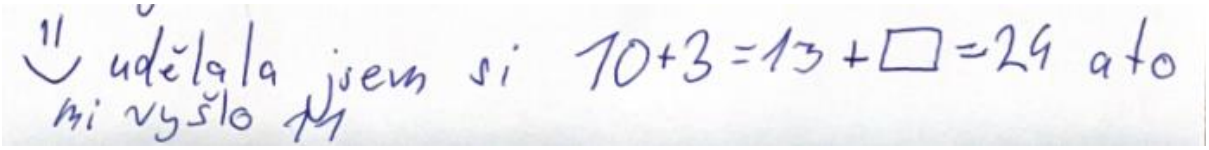
OBRÁZEK 4.6 | Otazník je neznámá



OBRÁZEK 4.7 | Zbytek je neznámá



OBRÁZEK 4.8 | Čtvereček je neznámá



B

Využití úloh ve výuce pro plnění očekávaných výsledků učení

Část B je doprovodným materiálem k pracovnímu sešitu Data kolem nás. Obsahuje metodické komentáře k úlohám, tipy do výuky a podněty pro sebereflexi žáků.

B VYUŽITÍ ÚLOH VE VÝUCE PRO PLNĚNÍ OČEKÁVANÝCH VÝSLEDKŮ UČENÍ

Úvod

Potenciál uvolněných úloh TIMSS můžeme využít jak pro pedagogické diagnostikování (viz část A), tak i pro naplňování očekávaných výsledků učení (OVU) v revidovaném RVP ZV v rámci nově zařazeného tematického okruhu Statistika a pravděpodobnost (viz dále). Seznámení se s analýzami žákovských řešení v části A umožní učiteli hlubší vhled do překážek v porozumění úlohám u žáků, který může využít pro efektivní plánování své výuky.

Část B přináší učiteli podněty, jak lze s uvolněnými úlohami z šetření TIMSS 2023 ve výuce pracovat, a nabízí možnosti použít buď původní zadání úlohy, nebo její část, popřípadě dává prostor pro úpravy, aby naplnila konkrétní zvolený cíl.

Návrhy jednotlivých aktivit do vyučovací hodiny jsou opatřené metodickými komentáři a opírají se jak o výsledky z mezinárodního šetření, tak o analýzy konkrétních žákovských řešení a naše dlouholeté pedagogické i výzkumné zkušenosti.

Testování žáků v mezinárodním šetření probíhá pouze digitálně, a je tedy do značné míry nemožné sledovat myšlenkové procesy žáka při řešení dané úlohy. Proto jsme zadali vybrané úlohy dalším celkem 41 žákům ze 4. a 5. ročníků z různých škol, kteří úlohy řešili v papírové podobě. Měli navíc za úkol kromě svých zápisů podrobně komentovat postupy řešení. Tato žákovská řešení s vysvětlujícími komentáři jsme podrobně analyzovali a porovnali je s výsledky celostátními.

Přestože jde o poměrně malý vzorek žáků, analýzy zejména chybných řešení nám poskytly dobrý vhled do překážek v porozumění jednotlivým úlohám. Ty se pak staly podkladem pro návrh sady úloh, které se vážou k jednotlivým uvolněným úlohám, a pro náměty, jak se zadáními pracovat. Naším cílem je odhalené překážce předejít, podpořit uchopení konkrétní úlohy s porozuměním a přispět tak k rozvoji hlubšího porozumění celé dané problematice.

Cílem předloženého materiálu je:

- nabídnout učiteli snadno dostupný učební materiál v podobě pracovních listů připravených k tisku a k okamžitému použití,
- doplnit materiál komentáři pro ujasnění, jak konkrétní úloha přispívá k naplňování revidovaného RVP ZV,
- v komentářích upozornit na úskalí jednotlivých úloh podepřená vlastní zkušeností se žáky 5. ročníku,
- poukázat na diagnostický potenciál úloh a na možnosti práce s chybou,
- vytvořit posloupnost postupných kroků a úloh vedoucích ke zvládnutí uvedené úlohy.

Metodické komentáře k pracovnímu sešitu Data kolem nás

Všechny předložené úlohy ve formátu pracovních listů v pracovním sešitu včetně dalších doplňujících úloh a aktivit v metodických komentářích odpovídají požadavkům revidovaného RVP ZV.

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Stupeň vzdělávání: 1. stupeň ZŠ

Tematický okruh: **Statistika a pravděpodobnost**

Očekávaný výsledek učení (OVU): MAT-MAT-004-ZV5-009 **Získává data, graficky je zaznamenává, grafický záznam dat čte a interpretuje**

Úlohy cílí na OVU MAT-MAT-004-ZV5-009, ale jejich řešením žáci získávají zkušenosti přesahující do mnoha dalších oblastí i dalších OVU nejen v tematickém okruhu Statistika a pravděpodobnost.

Předpokládané zařazení do výuky: **4. až 6. ročník ZŠ**

Zařazení jednotlivých úloh do konkrétního ročníku je pouze orientační a učitel zváží jejich využití podle předchozích zkušeností žáků. Řadu úloh nebo aktivit je možné, ba dokonce vhodné, zařazovat i do nižších ročníků, než je uvedeno. Některé úlohy jsou vhodné i pro zařazení na 2. stupni ZŠ.

Metodické doporučení k využití materiálů

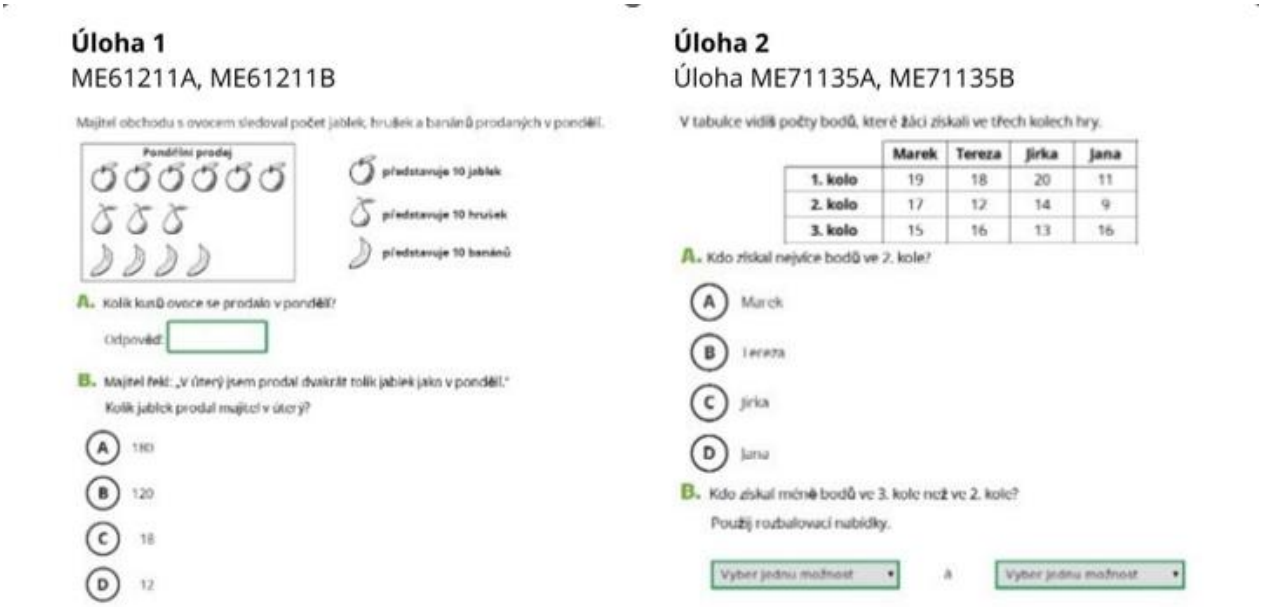
Pracovní sešit je rozdělen do šesti kapitol, z nichž každá je zaměřena na rozvoj určitých dovedností potřebných pro práci s daty. Každá kapitola je tvořena souborem několika pracovních listů. Jednotlivé pracovní listy jsou časově plánovány na jednu vyučovací hodinu a zahrnují jednu nebo více úloh, které rozvíjejí konkrétní dovednost.

1. kapitola **Lov dat** – sběr dat, jejich evidence a vyhodnocení
2. kapitola **Datový úklid** – různé způsoby organizace dat
3. kapitola **Řeč dat** – čtení a interpretace dat
4. kapitola **Datová utkání** – práce s daty v tabulkách
5. kapitola **Data ve spojení** – porovnávání různých způsobů zpracování dat a hledání souvislostí
6. kapitola **Datová kamufláž** – kritické posouzení grafického zpracování dat

Úlohy v kapitolách i jednotlivé kapitoly jsou uspořádány tak, že postupně roste jejich obtížnost i rozsah poznatků a dovedností. Doporučujeme proto s pracovními listy pracovat postupně v předloženém pořadí.

První úlohy předpokládají, že se žák v tématu teprve začíná orientovat a získává první zkušenosti. Při řešení dalších úloh své zkušenosti postupně upevňuje, obohacuje a rozvíjí až k naplnění OVU MAT-MAT-004-ZV5-009.

Čtyři uvolněné úlohy z TIMSS 2023 jsou zařazeny do kapitol 2 (úloha 4), 3 (úloha 1), 4 (úloha 2) a 6 (úloha 3) a jsou zasazeny do gradované řady úloh. Učiteli mohou sloužit k ověření porozumění danému učivu v tématu.



Úloha 1

ME61211A, ME61211B

Majitel obchodu s ovocem sledoval počet jablek, hrušek a banánů prodaných v pondělí.

Pondělní prodej

= představuje 10 jablek

= představuje 10 hrušek

= představuje 10 banánů

A. Kolik kusů ovoce se prodalo v pondělí?

Odpověď:

B. Majitel řekl: „V úterý jsem prodal dvakrát tolik jablek jako v pondělí."

Kolik jablek prodal majitel v úterý?

A 180

B 120

C 18

D 12

Úloha 2

Úloha ME71135A, ME71135B

V tabulce vidíš počty bodů, které žáci získali ve třech kolech hry.

	Marek	Tereza	Jirka	Jana
1. kolo	19	18	20	11
2. kolo	17	12	14	9
3. kolo	15	16	13	16

A. Kdo získal nejvíce bodů ve 2. kole?

A Marek

B Tereza

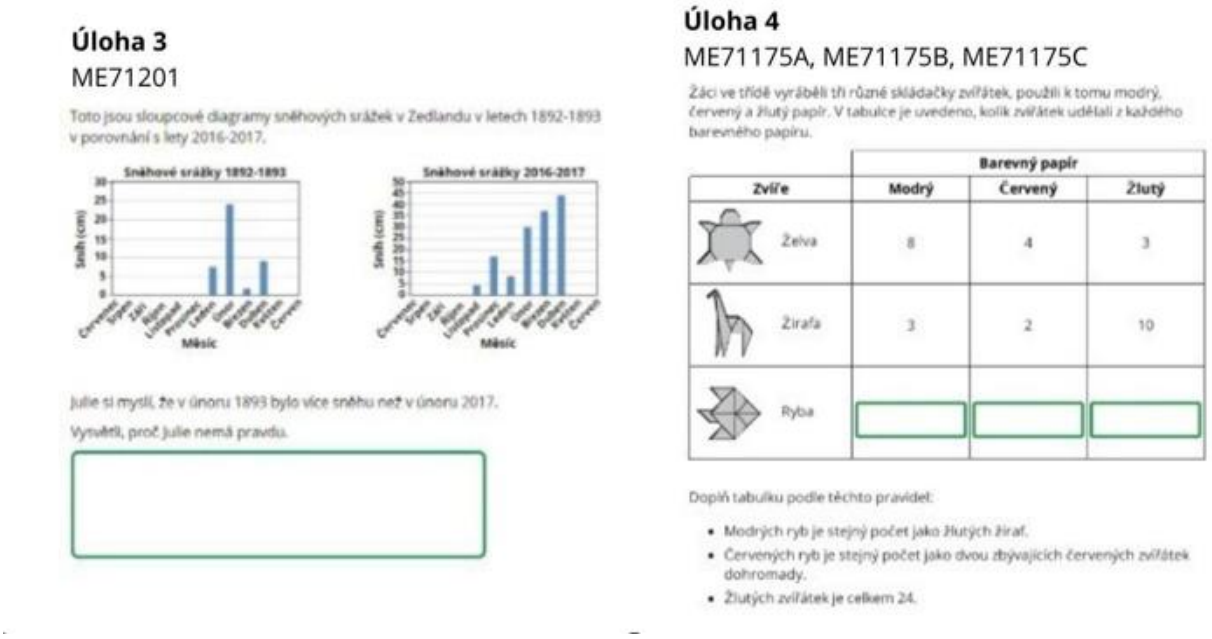
C Jirka

D Jana

B. Kdo získal méně bodů ve 3. kole než ve 2. kole?

Použij rozbalovací nabídky.

Vyber jednu možnost a Vyber jednu možnost



Úloha 3

ME71201

Toto jsou sloupcové diagramy sněhových srážek v Zedlandu v letech 1892-1893 v porovnání s lety 2016-2017.

Julie si myslí, že v únoru 1893 bylo více sněhu než v únoru 2017.

Vysvětli, proč Julie nemá pravdu.

Úloha 4

ME71175A, ME71175B, ME71175C

Žáci ve třídě vyráběli tři různé skládačky zvířátek, použili k tomu modrý, červený a žlutý papír. V tabulce je uvedeno, kolik zvířátek udělali z každého barevného papíru.

	Barevný papír		
Zvíře	Modrý	Červený	Žlutý
Želva	8	4	3
Žirafa	3	2	10
Ryba			

Doplň tabulku podle těchto pravidel:

- Modrých ryb je stejný počet jako žlutých žiraf.
- Červených ryb je stejný počet jako dvou zbývajících červených zvířátek dohromady.
- Žlutých zvířátek je celkem 24.

Pracovní sešit jako portfolio pokroku žáka

Žák může s celým souborem pracovních listů pracovat jako s portfoliem, ve kterém sleduje svůj pokrok v oblasti práce s daty.

Grafika na deskách i titulních stranách kapitol je připravena k sebehodnocení žáka. Prostřednictvím vybarvování odpovídajících polí zaznamenává svůj postup jednotlivými tématy i zvládnutí dané uvolněné úlohy z TIMSS 2023.

6 bodů spojnicového grafu (pro někoho možná šňůrka se šesti korálky) představuje 6 kapitol pracovního sešitu.

4 sloupce sloupcového diagramu poukazují na čtyři uvolněné úlohy z TIMSS 2023, které v rámci pracovního sešitu žák bude řešit.

Sebehodnocení žáků

V rámci mapování pokroku je v pracovním sešitě věnována také velká pozornost sebehodnocení žáků, které je v souladu s formativním přístupem, kdy žák na základě nastavených kritérií úspěchu hodnotí míru ovládnutí dané dovednosti. Škála pro hodnocení je inspirována metodikou Vysvědčení JINAK.

(https://vysvedcenijinak.ped.muni.cz/)

Každá kapitola pracovního sešitu obsahuje tabulku s přehledem kritérií, která zároveň ukazují, co by měl žák po vyřešení úloh kapitoly ovládat. Před každou novou kapitolou by se žáci měli s těmito kritérii seznámit, aby věděli, co se od nich bude očekávat a na co se budou zaměřovat při sebehodnocení. K této tabulce by se učitel měl vracet průběžně, ideálně na konci vyučovací hodiny nebo nějakého menšího celku v rámci kapitoly, aby si žáci zaznamenali, zda se v ovládnutí daného kritéria posunuli, a sledovali svůj pokrok v učení.

Jedno vybarvené políčko (sloupec J) znamená, že žák dané kritérium zatím neovládá. **Dvě vybarvená políčka** (sloupce J a Č) znamenají, že již kritérium částečně ovládá, ale jen s pomocí. Sám to ještě nezvládne. **Tři políčka** (sloupce J, Č a T) žák vybarví, pokud již téměř dané kritérium zvládá, tedy si ve většině případů ví sám rady, jen někdy potřebuje ještě drobnou pomoc nebo ujištění anebo ještě dělá chyby. **Čtyři vybarvená políčka** znamenají, že žák daný výstup s jistotou ovládá. Míru ovládnutí daného kritéria žáci tedy označují vybarvením určitého počtu políček (ne tedy pouze např. třetí políčko, ale první tři políčka v případě míry ovládnutí na úrovni označené „T“).

KRITÉRIA ÚSPĚŠNOSTI / SEBEHODNOCENÍ	J	Č	T	Ú
Navrhnu otázku vhodnou pro sběr dat.				
Připravím tabulku pro záznam získaných odpovědí (dat).				
Do tabulky správně zaznamenám získané odpovědi (data).				
Uvedu alespoň 2 zjištění na základě získaných dat.				

Další barvy žák využívá k zachycení svého pokroku. To znamená, že např. v první hodině v rámci svého sebehodnocení vybarví tři políčka, protože vnímá, že k navržení vlastní otázky pro sběr dat potřebuje ještě trochu od někoho pomoc nebo alespoň kontrolu. Po vyřešení dalších úloh a získání dalších zkušeností si je ale v této oblasti již daleko jistější, proto si další barvou vybarví poslední čtvrté políčko, protože si je s formulací otázek jistý a zvládne to již sám. Jelikož pro každý další posun volí jinou barvu, má svůj pokrok zachycený i vizuálně a učí se své učení vnímat jako proces od „zatím nezvládám“ k „už to zvládnu sám“.

Zde podtrhneme význam slova ZATÍM, popř. JEŠTĚ, které zdůrazňuje, že i když se ze začátku nedaří daná dovednost zvládnout, jde pouze o počáteční stav, který není konečný. Každou dovednost lze tedy postupně rozvíjet až k jejímu ovládnutí. Tato skutečnost je významná pro správné nastavení vnímání svého učení jako možnosti k dalšímu rozvoji, který má každý ve svých rukách.

Shrnutí používaných škál pro kritéria hodnocení

J – **ještě neosvojeno** = výstup zatím nezvládám.

Č – **částečně osvojeno** = výstup zvládám pouze s pomocí.

T – **téměř osvojeno** = výstup zvládám jen v jednoduchých situacích, ještě chybuji nebo potřebuji drobnou pomoc či radu.

Ú – **úplně osvojeno** = výstup zvládám úplně samostatně ve známých i nových situacích.

Prostor pro sebehodnocení mají žáci také v rámci kapitol u jednotlivých úloh, na konci pracovních listů či v kratších výukových celcích. Jde vždy také o symboly čtyř čtverečků nebo čtyř jiných grafických zobrazení zachycujících škálu JČTÚ. Zároveň je k nim vždy doplněno i kritérium, které daná úloha nebo úlohy rozvíjely. Díky tomu má žák také u dílčích úloh možnost sledovat, co se zrovna učí, a ověřovat si a vyhodnocovat, jak danou dovednost již ovládá.

Učitelům, kteří teprve se žáky začínají se sebehodnocením na základě formulovaných kritérií, doporučujeme, aby si to v této relativně nové oblasti matematiky určitě vyzkoušeli.

1. kapitola LOV DAT – Sbíráme, zapisujeme a vyhodnocujeme data

Vstup do tématu

Dříve než se pustíme do řešení jednotlivých úloh, například na zde přiložených pracovních listech nebo i z jiných učebních materiálů v rámci práce s daty, je velice důležité a osvědčené připravit se žáky aktivitu, při níž oni sami zorganizují a realizují sběr dat, jejich uspořádání a vizualizaci pro stanovený cíl. Silně motivačně také působí, když jsou sami žáci spolutvůrci zadání úkolů.

Aktivitu mám vyzkoušenou se žáky 5. ročníku, kteří se rozhodli zjistit, jaký je nejoblíbenější předmět u žáků na 1. stupni ZŠ na naší škole. Nejprve si sběr dat vyzkoušeli v rámci třídy a jako formu záznamu si zvolili tabulku. Dohodli se také na jednotné formě zápisu i podobě tabulky, aby pak snadněji dávali dohromady informace z jednotlivých tříd. Jejich úkolem také bylo celý sběr zorganizovat. Do dalších tříd šli v menších skupinkách. To pro ně byla velmi cenná zkušenost, protože viděli i z druhé strany, jak je někdy obtížné zajistit pozornost všech dětí ve třídě, aby poslouchaly pokyny a hlásily se, kdy mají. Ověřili si také, jak je nutné provádět důsledně záznamy a jejich kontrolu, aby jim data seděla. Například musí souhlasit celkový počet žáků ve třídě a počet hlasů u jednotlivých předmětů, když každý mohl hlasovat jen pro jeden předmět.

V rámci informatiky se pak učili vše zpracovat i na počítači v tabulkovém editoru a k jejich zjištění vydali také článek ve školním časopise. Sami si navíc zjistili také u učitelů jejich nejoblíbenější předmět v dané třídě. Bylo zajímavé, že i v poměrně malém vzorku 13 tříd se projevila korelace mezi nejoblíbenějším předmětem učitele a nejoblíbenějším předmětem žáků v jeho třídě. (SP)

Základem této vstupní aktivity pro práci s daty je volba vhodné výzkumné otázky, tak aby bylo možné shromáždit data potřebná k jejímu zodpovězení. Může jít o evidenci osobních údajů, jako např. kdo má kolik sourozenců, jaké má kdo domácí mazlíčky, oblíbené barvy, předměty ve škole, sporty, zpěváky apod. Možností je celá řada, ale nejlepší je, když si sami žáci zvolí, co je zajímá.

Inspiraci je možné hledat také např. v projektu Minisčítání. *(https://csu.gov.cz/miniscitani/o-miniscitani)* Učitel by žákům měl dát volnost, aby si sami navrhli organizaci sběru dat, jejich evidenci, třídění a interpretaci, i když to zpočátku nemusí být ideální. Volba způsobu, jak nasbíraná data organizovat a interpretovat, závisí na cíli a na tom, komu budou data prezentovat.

Pracovní list 1

Cíl:

- Žák navrhne způsob sběru zvolených dat a jejich organizaci.
- Žák vyhledá požadované informace z organizovaného souboru dat.

Zahájení práce

Žáci si poznamenají, zda práce bude probíhat v týmech (ve skupinkách, celá třída společně) nebo samostatně, a podle toho si buď společně, nebo každý sám stanoví otázku, na kterou bude chtít hledat odpověď na základě sběru a organizace dat od ostatních spolužáků. Každý sám, a to i v případě práce v týmech, si zkusí udělat odhad, jak asi vyhodnocování dat dopadne, například jaká bude nejčastější odpověď. Na začátku práce je také dobré seznámit se s kritérii úspěšnosti v tabulce na začátku kapitoly, jejichž ovládnutí se na konci kapitoly očekává a která budou žáci v závěrečném sebehodnocení vyhodnocovat.

Po skončení sběru a vyhodnocení dat

Žáci si stručně zapíšou závěr svého zjištění na základě vyhodnocení sebraných dat. V dalších otázkách se zaměří na přínos pro své učení. Doporučení pro další práci umožňuje žákům celkově vyhodnotit průběh dosavadní práce. Doporučení žák píše sobě, aby zformuloval, na co si příště má dát pozor nebo co příště zkusí udělat jinak. Doporučení je možné psát také pro někoho dalšího jako radu, čeho se při práci vyvarovat. Tento typ úkolů vede žáky k rozvoji jejich metakognice.

V tabulce kritérií úspěšnosti na začátku kapitoly si žáci v rámci sebehodnocení zaznamenají, do jaké míry podle svého názoru již jednotlivá stanovená kritéria ovládají, a to dle přiložené škály JČTÚ (viz Sebehodnocení žáků).

J – **ještě neosvojeno** = výstup zatím nezvládám.

Č – **částečně osvojeno** = výstup zvládám pouze s pomocí.

T – **téměř osvojeno** = výstup zvládám jen v jednoduchých situacích, ještě chybuji nebo potřebuji drobnou pomoc nebo radu.

Ú – **úplně osvojeno** = výstup zvládám úplně samostatně ve známých i nových situacích.

Čtverečkované papíry jsou do kapitoly zařazeny pro poznámky žáků nebo pro možnost záznamu sesbíraných dat např. do tabulky nebo sloupcového diagramu.

Pracovní list 2

Cíl:

- Žák navrhne způsob sběru zvolených dat a jejich organizaci.
- Žák vyhledá požadované informace z organizovaného souboru dat.

V rámci formativního přístupu je přínosné, aby žáci dostali prostor využít svá doporučení při další práci. Z toho důvodu jsou aktivita i pracovní list zařazeny v obdobné podobě dvakrát. Na základě zkušeností s předchozím sběrem dat si mohou žáci sami nebo v menších skupinách navrhnout další výzkumnou otázku a samostatně také plánovat sběr, evidenci dat i jejich vyhodnocení. V závěru pracovního listu je opět vyznačen prostor pro sledování vlastního učení. I po dokončení pracovního listu 2 by se žáci měli vrátit k tabulce s kritérii na začátku kapitoly a jinou barvou pastelky vyhodnotit, zda se v některé z oblastí posunuli (viz Sebehodnocení žáků).

2. kapitola DATOVÝ ÚKLID – Organizujeme data

Vstup do tématu

Tato kapitola vychází ze 4. uvolněné úlohy TIMSS 2023 (ME71175), která předpokládá, že žák ovládá základní práci s tabulkou, jako je orientace v datech zanesených do tabulky i doplnění chybějících dat.

Jako vstup do tématu ale doporučujeme i další aktivity, které nejen rozvíjejí potřebné dovednosti pro práci s tabulkou, ale jsou cíleny také na hledání vhodných organizačních principů. Tyto aktivity jsou vhodné i pro mladší školní žáky.

Žákům např. předložíme soubor nějakých objektů a necháme je v menších skupinkách hledat a diskutovat způsoby, jak lze objekty zorganizovat. Mladším žákům můžeme zpočátku nabídnout i různé snadno dostupné přírodniny, jako jsou např. kaštany, šišky, listy, …, případně geometrické tvary v různých barvách, např. čtyři tvary ve čtyřech barvách, kostky ze stavebnice apod. Každý navržený způsob organizace dat je potřeba vždy vysvětlit a zdůvodnit.

Pokud žáci časem sami nepřijdou s nápadem využít k organizaci dat tabulku, určitě jim ji někdy nabídneme. Tabulka je velice silný a důležitý nástroj pro organizaci souboru dat.

Práce ve skupinách nabízí možnost porovnávat výsledky jednotlivých skupin, posuzovat srozumitelnost a přehlednost zvolených způsobů organizace objektů, pojmenovávat shody a rozdíly mezi jednotlivými řešeními a vyhodnocovat, které z nich je pro daný cíl nejvhodnější.

Přehled a více informací k různým způsobům organizace dat uvádíme v úvodu publikace v oddílu Základní typy organizačních principů souboru dat.

Pracovní list 3

Cíl:

- Žák uspořádá prvky do dvouparametrické tabulky.
- Žák najde parametr tabulky a doplní chybějící prvky.

Zahájení práce

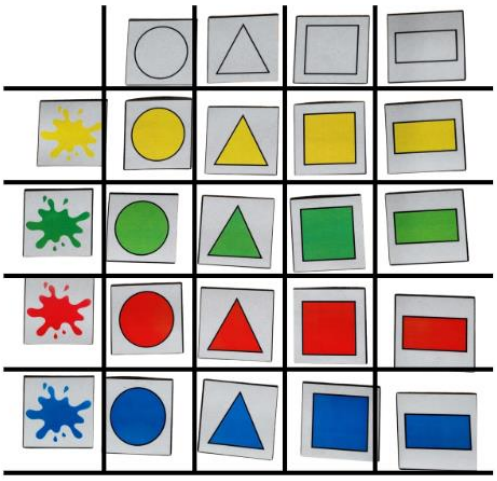
Dříve než se žáci pustí do řešení úloh na pracovním listu, mohou pracovat s kartičkami v příloze 1A a 1B. Kartičky v této příloze mohou využít i mladší žáci.

Na zemi pomocí lepicí pásky vytvoříme tabulku 5 × 5 čtverečků a necháme žáky, ať jednotlivé kartičky společně rozmístí do tabulky (viz např. obrázek 1).

Obtížnost úlohy gradujeme mírou úplnosti zadání obou záhlaví tabulky. Buď můžeme hned od začátku umístit do svislého či vodorovného záhlaví tabulky kartičky určující barvu či tvar, anebo necháme žáky, aby tato kritéria vymysleli sami. Je také možné z doplněné tabulky odebrat jen několik kartiček, které budou žáci vracet na správná místa. Nebo naopak můžeme rozmístit jen pár kartiček do tabulky a žáci budou rozmísťovat zbylé kartičky včetně těch do záhlaví. Vhodné je zařadit i chybně vytvořenou či doplněnou tabulku s úkolem chyby odhalit a opravit. Důležité je, aby žáci vždy argumentovali, proč je možné kartičku položit jen na dané konkrétní místo, do daného řádku a daného sloupce.

Když žáci 1. ročníku ZŠ měli za sebou již několik prvních zkušeností se zápisem počtu objektů do tabulky, zkusila jsem jim na zem udělat tabulku jako mřížku 4 × 4 (4 řádky a 4 sloupce). Různě po třídě pak hledali 16 poschovávaných kartiček se čtyřmi útvary ve čtyřech barvách. Každý, kdo nějakou kartičku našel, měl ji umístit kamkoliv do připravené mřížky na zemi. Plánovala jsem, že si pak nad tabulku sedneme a budeme společně hledat, jestli lze v tabulce nějak objekty zorganizovat, popřípadě že dostanou další kartičky jen s označením barvy nebo tvaru do záhlaví tabulky. Žáci však sami od sebe začali diskutovat a přemísťovat kartičky tak, že ve sloupcích byly stejné tvary a v řádcích stejné barvy. Svůj postup dokázali i zdůvodnit a zároveň opravit pár chybně umístěných kartiček. Snadno pak již také umístili kartičky do záhlaví tabulky. (SP)

OBRÁZEK 1 | Organizace barevných tvarů ve dvouparametrické tabulce



OBRÁZEK 2 | Kartičky pro organizaci dat

Práce s pracovním listem

Zkušenosti získané prací s kartičkami čtyř tvarů a čtyř barev pak žáci využijí pro řešení úloh na pracovním listě 3. Úlohy tak mohou posloužit k ověření zvládnutí práce s dvouparametrickým souborem dat – barva, tvar.

Ke každé úloze je doporučeno zařadit také sebehodnocení žáka zaměřené na dílčí kritérium vyplývající z dané úlohy.

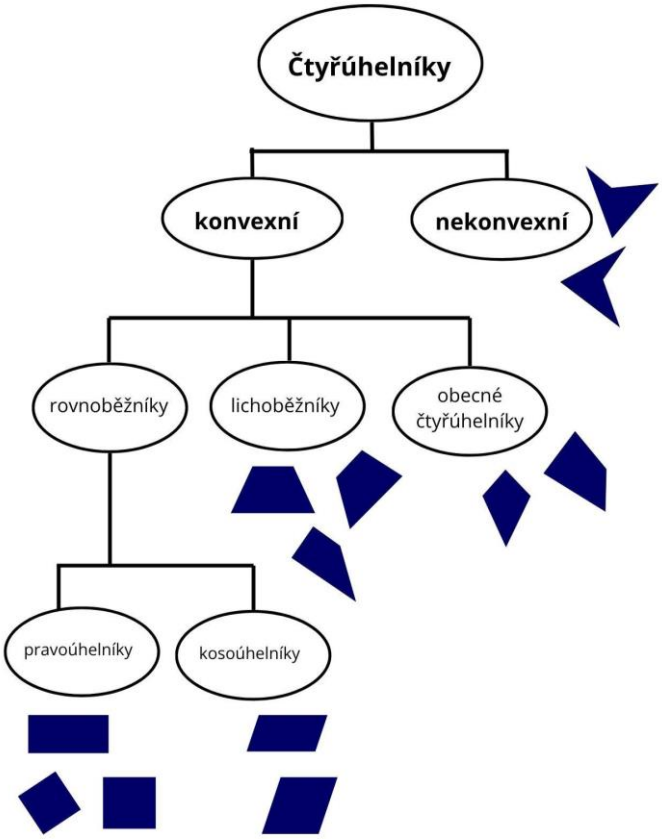
Pracovní list 4, 5

Cíl:

- Žák najde klasifikační kritéria k souboru objektů.
- Žák rozdělí objekty do skupin podle daných kritérií.

Žáci ve skupině hledají, jak rozstříhané kartičky z přílohy 2 zorganizovat do různých „rodin“, které lze dále hierarchizovat (viz úvod publikace, oddíl Základní typy organizačních principů souboru dat). Například sporty lze rozdělit na zimní a letní. V rámci letních sportů je možné oddělit skupinu míčových sportů. Míčové i další sporty lze dále dělit na individuální a týmové apod. Podstatné je, aby roztřídění do skupin bylo jednoznačné, tj. aby každá kartička měla vždy jedno konkrétní umístění na základě zvoleného kritéria. Důležité je, aby si žáci svá řešení ve skupině porovnávali, popisovali shodnosti a odlišnosti a také zdůvodňovali zvolený organizační princip.

OBRÁZEK 3 | Klasifikace a hierarchizace čtyřúhelníků



Pracovní list 6

Cíl:

- Žák roztřídí data do Vennova diagramu podle daných kritérií.
- Žák najde klasifikační kritéria.

Zahájení práce

Přínosná aktivita, kterou lze zařadit i mimo hodiny matematiky, je organizace žáků ve třídě pomocí Vennova diagramu. Vennův diagram může učitel vyznačit na zem buď křídou, nebo pomocí provázků, švihadel, obručí. Nejdříve určí nějaké tři jevy, které lze pozorovat ve třídě a které se překrývají.

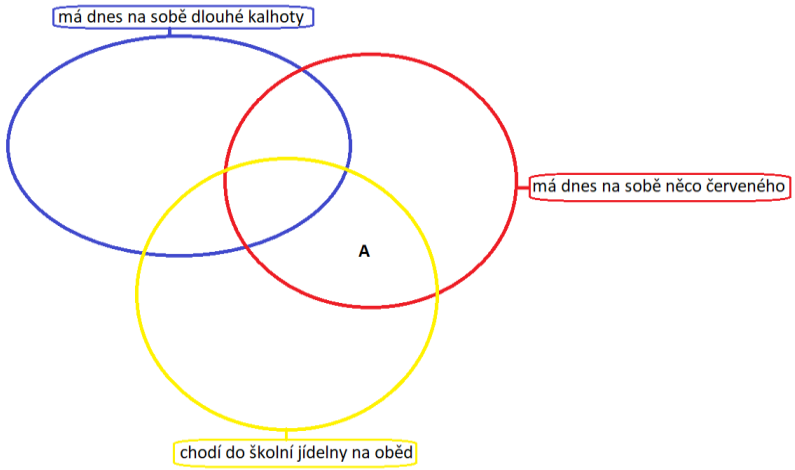
V našem případě je na obrázku 4 Vennův diagram pro tři množiny:

modrá – množina všech žáků ve třídě, kteří mají dnes na sobě dlouhé kalhoty,

červená – množina všech žáků ve třídě, kteří mají dnes na sobě něco červeného,

žlutá – množina všech žáků ve třídě, kteří chodí do školní jídelny na oběd.

OBRÁZEK 4 | Vennův diagram



Každý žák se postaví do příslušného pole, tzn. i mimo ovály, a vždy zdůvodní, proč si na dané místo stoupl. Například žákyně Anička (A) se postavila do pole, jak je vyznačeno na obrázku, a zdůvodnila to slovy: „Stoupla jsem si sem, protože mám dnes červený šátek, chodím do školní jídelny na oběd a nemám dnes na sobě dlouhé kalhoty.“ Učitel se pak zeptá, jestli je pravda, že každý žák, který si stoupl do stejného pole s Aničkou, může o sobě říci totéž. Ten, kdo stojí mimo vyznačené množiny, nemá dnes dlouhé kalhoty ani nic červeného na sobě a ani nechodí do školní jídelny na oběd. Opakováním obdobné aktivity se žáci zdokonalují v přesnosti a stručnosti svých argumentací.

Pro práci s Vennovými diagramy můžeme také využít znovu nastříhané kartičky z přílohy 2, popřípadě i 1. Zpočátku využijeme Vennův diagram pouze pro dvě množiny. Charakteristickou vlastnost každé množiny může nejprve určit učitel a žáci podle toho pouze rozmisťují kartičky. Později mohou žáci vymýšlet vlastní charakteristické vlastnosti množin Vennova diagramu pro zvolené kartičky.

Pro zdokonalování se v porozumění i tvorbě klasifikačních kritérií u Vennových diagramů může být velmi přínosné pracovat ve skupinách, přičemž každá skupina vymyslí klasifikační kritérium a kartičky podle něj rozmístí do Vennova diagramu. Své kritérium zapíšou na papír a ten přeloží, aby nebylo vidět. Skupiny se přemístí a podle rozmístění kartiček ve Vennově diagramu hledají klasifikační kritérium, které vymyslela jiná skupina. Své řešení poté porovnají se zápisem na papíru.

Žáci se tak podílejí na tvorbě úloh a zároveň kultivují formulaci klasifikačního kritéria tak, aby bylo jednoznačné pro všechny zařazované objekty (kartičky s obrázky).

Práce s pracovním listem

Stejně jako u pracovního listu 3 je možné úlohy na tomto pracovním listu využít pro ověření míry zvládnutí práce s Vennovými diagramy po předchozích aktivitách s kartičkami.

Opět je součástí úloh sebehodnocení žáka s kritérii postihujícími základní dovednosti, které by si žák při řešení úloh měl osvojit.

Pracovní list 7

Cíl:

- Žák vyhledá data ve dvouparametrické tabulce a doplní chybějící data podle vyslovených pravidel.

Jedná se o uvolněnou úlohu z šetření TIMSS 2023 (ME71175). Lze ji považovat za úlohu shrnující klíčové zkušenosti získané v předchozích aktivitách a úlohách z pracovních listů. Jejím vyřešením žák prokáže nejen orientaci v organizaci dat do tabulky, ale i schopnost data číst a podle zadaných kritérií správně doplnit další údaje.

Pracovní list 8

Cíl:

- Žák vytvoří realizovatelný návod na skládání rybky.

Ač se to nemusí na první pohled zdát, úloha může být pro žáky velmi náročná, a proto ji doporučujeme řešit v menších skupinkách. Cílem je, aby žáci zjistili správné pořadí jednotlivých kroků při skládání papírové rybky a podle něj je uspořádali. Seznamují se tak s dalším typem organizace dat, a to uspořádáním (viz úvod publikace, oddíl Základní typy organizačních principů souboru dat).

3. kapitola ŘEČ DAT – Čteme a vyhodnocujeme data v různých zobrazeních

Vstup do tématu

Třetí kapitola, která se zaměřuje na čtení a vyhodnocování dat zachycených např. v obrázkovém schématu, tabulce nebo sloupcovém diagramu, vychází z první uvolněné úlohy šetření TIMSS 2023 (ME61211).

Při analýze písemných řešení žáků se ukázalo, že nejčastější příčina chybných řešení úlohy ME61211 se netýkala ani tak matematického obsahu, jako spíše nedostatků žáků ve čtení s porozuměním. Tím máme na mysli jejich porozumění „jazyku“ obrázků a jejich organizaci. Tato úloha vyžaduje, aby žák porozuměl jak textové, tak obrázkové části zadání. Použitá vizualizace dat není v učebnicích matematiky pro 1. stupeň obvyklá, tedy žák si při prvním přečtení zadání úlohy pravděpodobně nevybaví obdobnou úlohu, kterou již někdy řešil a jejíž postup řešení by mohl napodobit.

Z analýz žákovských řešení také vyplynulo několik komplikujících jevů, s nimiž se žáci potýkali při uchopování zadání úlohy. S těmito jevy proto cíleně pracujeme i v jednotlivých úlohách na pracovních listech této kapitoly, a to tak, že se jim buď vyhneme, abychom nezatížili žákovo porozumění zadání úlohy, nebo naopak na ně zaměříme pozornost při rozboru úlohy se žáky.

Komplikace vyplývající z použitých komunikačních módů

- **Zadání úlohy je tvořeno údaji** ve třech módech – textem, obrázkem neboli ikonou a vysvětlivkami k obrázku. Pro získání potřebných informací k řešení úlohy je třeba tyto tři módy propojit, přičemž ve vysvětlivkách jsou použity stejné ikony jako v obrázku.

Komplikace vyplývající z grafiky

- **Vizuální informace** v obrázku je zvýrazněna orámováním. To může vést žáka k jejímu upřednostnění, přehlédnutí nebo podcenění zbylé části zadání.
- **Opakující se zadání vysvětlivek.** Slovní formulace vysvětlivky „jedno jablko představuje 10 jablek“ působí poněkud nesrozumitelně. Není uvedeno, že jeden obrázek jablka zastupuje pak 10 kusů jablek.
- **Uspořádání obrázků** ovoce do řádků a sloupců v rámečku může vést k interpretaci, že pokud některý řádek není „dokončený“, některé ovoce chybí.

Komplikace vyplývající z jazyka

- **Použití slova „představuje“** v této situaci pro žáky nebývá běžné. Obvykle se s ním setkávají v jiném kontextu.
- Kombinace **nadřazeného pojmu** ovoce s **podřazenými pojmy** jablko, hruška a banán. Navíc podle našich zkušeností některé děti nepovažují banán za ovoce.

Pracovní list 9

Cíl:

- Žák se orientuje v textovém zadání úlohy a v obrázkovém schématu s vysvětlivkami.
- Žák formuluje otázky, na které lze najít odpovědi ze zadání úlohy.

Úloha 1 (PL 9)

Množství výše uvedených komplikujících jevů znesnadňuje žákům již první fázi uchopování úlohy. Proto v úloze 1 pracujeme nejprve jen se samotným zadáním, tedy s popisem situace, ale bez otázek k řešení. Předejdeme tak tomu, že někteří žáci začnou úlohu hned řešit a nebudou věnovat pozornost diskusi o zadání. Naším úkolem je zajistit, aby zadání dobře porozuměli pokud možno všichni žáci. Za tímto účelem představíme jednu z možných technik, která vede k porozumění textu a kterou lze využít ve všech aktivitách založených na práci s textem, zejména při řešení slovních úloh.[1] Tato technika se může jevit jako časově náročná, avšak velmi důležitá. Velice vhodné je tuto část uchopování

[1] Technika *Všímám si / Zajímá mě* je popsána v Babanová, A., 2019, Dvanáct ověřených metod pro rozvoj kolegiální spolupráce, Gender Studies, o.p.s., https://aa.ecn.cz/img_upload/8b47a03bf445e4c3031ce326c68558ae/dvanact_overenych_metod_a4_web_opr_publicita.pdf.

úlohy realizovat jako práci s textem z dotace hodin českého jazyka, čímž navíc propojíme dva klíčové vyučovací předměty.

1. Levý sloupec tabulky

Žáci si nejprve samostatně prostudují zadání úlohy, které popisuje určitou situaci, a pokusí se v něm zorientovat. V tom jim pomůže výzva, aby se zamysleli nad tím, co v zadání vidí, čeho zajímavého si všimli a jaké informace lze ze zadané situace vyčíst. Své postřehy a nápady si zaznamenávají do levého sloupce tabulky připravené pod textem.

Úkol má dva cíle:

(1) aktivizace myšlení všech žáků,

(2) rozvoj schopnosti zaznamenat své myšlenky tak, aby bylo možné se k nim později vrátit, dále s nimi pracovat a v následující diskusi je rozvíjet.

2. Společná diskuse

a) Žáci, nejlépe v kruhu na koberci, sdílejí své myšlenky, které čtou ze svých poznámek na pracovním listu. Učitel na tabuli zapisuje vyslovené myšlenky žáků a podněcuje o nich diskusi, kterou moderuje. Tabule se tak stává důležitým nositelem sdílených nápadů a myšlenek, proto je důležité, aby na ni všichni žáci viděli.

b) V diskusi nad sepsanými nápady a postřehy žáků na tabuli společně vybereme a vyznačíme ty, které lze brát za nosné pro správné uchopení situace.

Komentář

a) Do společné diskuse žáci přinášejí nápady ze svých vlastních záznamů nebo další postřehy, které je napadly v reakci na nápady spolužáků a probíhající diskusi. Posuzují pravdivost a smysluplnost jednotlivých návrhů i srozumitelnost jejich formulace a porovnávají je se svými vlastními návrhy. Jednotlivé návrhy nikdo nehodnotí jako lepší či horší; zvažuje se pouze to, zda odpovídají popsané situaci. Učitel tak na tabuli zaznamená celou škálu postřehů – od zcela evidentních, jako je například počet jablek, až po složitější, jako je například výklad propojení vysvětlivek se schématem prodeje. Učitel diskusi moderuje a vede žáky k formulování a zpřesňování jejich myšlenek, ke vzájemnému naslouchání, ověřování pravdivosti jednotlivých tvrzení a k dalšímu rozvíjení myšlenek spolužáků. Zároveň usiluje o aktivní zapojení všech žáků. Může toho dosáhnout například tím, že přednostně poskytne prostor ke sdílení žákům, kteří mají obtíže s formulováním svých myšlenek nebo se hůře orientují v nově otevíraných problémech. Cílem diskuse je dobré porozumění úlohové situaci.

Učitel zapisuje nápady žáků na tabuli a ověřuje u jejich autorů, zda zapsaná formulace skutečně vystihuje to, co chtěli sdělit. Dbá tak na to, aby do jejich myšlenek nevnášel vlastní interpretaci ani je za žáky „nevylepšoval“. Na hledání stručnějších a srozumitelnějších formulací, zejména tam, kde žáci své myšlenky vyjadřují obtížně nebo krkolomně, se podílejí všichni společně. Učitel následně vyzve žáky, aby porovnali své vlastní záznamy s formulacemi zaznamenanými na tabuli a případně nabídli jejich srozumitelnější či přesnější podobu. Žáci tak kultivují své komunikační dovednosti.

Pro další podporu rozvoje jazykových dovedností učitel žáky vyzve, aby si i v průběhu společné diskuse třídy doplňovali poznámky o další nápady, zajímavé myšlenky, popřípadě o formulace, které považují za důležité zaznamenat. Vhodné je, aby si žáci pod původními poznámkami vyznačili čáru a nové poznámky zapisovali pod ni. Toto rozlišení původních a nových myšlenek může učitel využít při sebereflexi zaměřené na rozvoj metakognice žáků.

b) Diskuse třídy nemusí končit úplným vyčerpáním všech nápadů žáků. Jakmile začne ztrácet dynamiku a nepřináší již další hlubší myšlenky, učitel vyzve žáky, aby porovnali myšlenky zapsané na tabuli. Jejich úkolem je vybrat a označit jen několik těch, které považují v dané situaci za nejpodstatnější a které by podle nich neměly uniknout naší pozornosti.

3. Pravý sloupec tabulky + úloha 2 (PL 9)

Dalším krokem je formulace otázek, na které je možné ze zadání a zapsaných myšlenek nalézt odpověď.

Žáci pracují ideálně ve čtyřčlenných skupinách, ve kterých společně diskutují a do pravého sloupce tabulky na pracovním listu zapisují otázky, které je k zadané situaci napadají. Každá skupina pak vybere jednu otázku, na kterou má připravené řešení, a položí ji ostatním skupinám (viz úloha 2).

4. Diskuse otázek

Následně každá skupina představí svou vybranou otázku a celá třída společně hledá odpověď. Jednotlivá řešení poté žáci porovnají a posoudí, zda byla otázka formulována jasně a zda na ni bylo možné jednoznačně odpovědět.

V závěru této aktivity žáci společně vyhodnotí, která z navržených otázek jim přišla nejzajímavější, nejnáročnější, nejednoznačná apod.

Úloha 3 (PL 9)

Na závěr vyučování každý žák samostatně řeší úlohu 3, tedy tak, jak byla zadána v rámci TIMSS 2023.

Úloha slouží učiteli k ověření míry porozumění problému u jednotlivých žáků. Její vyřešení žáky je důkazem o učení. Podle výsledků si učitel naplánuje využití dalšího pracovního listu.

Na pracovním listu je zařazeno také **sebehodnocení**, které žákovi umožňuje posoudit, nakolik naplňuje stanovená kritéria úspěšnosti. Přestože se graficky liší od předchozích forem sebehodnocení, princip zůstává stejný – využívá motiv z úlohy, se kterou žák pracoval. Jednotlivé druhy ovoce představují jednotlivá kritéria a žák míru jejich zvládnutí vyjadřuje počtem vybarvených kusů ovoce v rámečku. Počet kusů ovoce od každého druhu odpovídá známé škále z předchozích úloh JČTÚ.

Pracovní list 10

Cíl:

- Žák si upevní zkušenosti získané při řešení úloh v PL č. 9 (orientace v textovém zadání úlohy a v obrázkovém schématu s vysvětlivkami) prostřednictvím analogické úlohy.

Úloha může být zařazena na začátku hodiny jako opakování nebo využita pro samostatnou práci žáků, která poskytne zpětnou vazbu o tom, nakolik již dokážou dané úlohy řešit samostatně. Vhodná je také pro skupinovou práci. Volba způsobu práce by měla vycházet z míry porozumění, kterou žáci prokázali v úloze 3 na předchozím PL 9.

Otázky navržené k zadané situaci v úloze jsou gradované od nejjednodušších po nejsložitější, což umožní sledovat úroveň porozumění u jednotlivých žáků. Řešení série gradovaných úloh dává také žákovi dobrou zpětnou vazbu o míře jeho porozumění, o jeho dovednostech řešit tento typ problémů. Postřehy jednotlivých žáků o jejich zpětné vazbě získané řešením úloh je vhodné alespoň ústně reflektovat diskusí se třídou.

Pracovní list 11

Cíl:

- Žák se orientuje ve schématu zápisu čísel pomocí evidence počtu prvků v jeho jednotlivých řádech.
- Žák aplikuje poznaný způsob pro zápis dalších čísel.
- Žák popíše, jak přesun jednoho prvku jistého řádu do jiného řádu ovlivní výsledné číslo.

Úloha 1, 2 (PL 11)

Úlohy jsou určeny především žákům, kteří potřebovali výraznou podporu při řešení úkolů na PL 9, popř. 10.

Lze je tedy využít, pokud učitel zjistí, že žáci nebyli schopni úlohu vyřešit ani po společném rozboru jejího zadání. Sérii úloh na tomto pracovním listu lze však velmi dobře využít také jako doplňující materiál v rámci jiné vyučovací hodiny, například pro žáky, kteří pracují rychleji.

Úloha 3 (PL 11)

Úlohu 3 na tomto PL doporučujeme do výuky zařadit. Žáci si v ní nejen dále upevňují schopnost orientovat se ve schématu a pracovat s daty zaznamenanými v tabulce, ale zároveň si prohlubují porozumění řádu přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě.

Pracovní list 12

Zahájení práce

Pracovní listy 12–16 nabízejí sérii úloh ideálně pro několik na sebe navazujících vyučovacích jednotek. Situace v úlohách vychází ze sledování a evidování průjezdu různých dopravních prostředků daným místem v daný časový úsek.

Úlohy na těchto pracovních listech mohou navazovat na předchozí listy, ale lze je využít také jako samostatný blok. V každém případě je při výskytu větších obtíží s porozuměním vhodné vrátit se k úlohám z předchozích pracovních listů.

Ideálním způsobem otevření úloh je přímá zkušenost žáků: žáci půjdou sledovat, kolik aut a dalších dopravních prostředků v daném čase projede po silnici např. u jejich školy. Žáci by si měli sami navrhnout organizaci sledování a způsob zapisování dat a měli by také rozhodnout, jak dlouho budou sledování realizovat. Nakonec se domluví, jak svá data zpracují, jakým způsobem je znázorní a jak je představí ostatním.

Cíl:

- Žák vyhledá odpovědi v obrázkovém schématu s vysvětlivkami.
- Žák vytvoří stejný způsob záznamu pro analogickou situaci.

Úloha 1 (PL 12)

Zadání úlohy 1 nabízí žákům zřejmě neobvyklý způsob záznamu sledování počtu a typu aut, která projela po silnici.

Pokud nyní nenavazujeme na řešení úloh uvedených na předchozích pracovních listech, je potřeba se více zaměřit na uchopení zadání, aby se v něm žáci dobře orientovali. To by mohlo probíhat např. společnou diskusí třídy.

Otázky a) až c) směřují nejen k ověření schopnosti orientovat se v zadání úlohy, ale také k rozvoji čtenářské gramotnosti. Z tohoto důvodu může žákům činit obtíže **úloha c)**. Je formulována delším textem, který obsahuje souvětí a podmiňovací způsob slovesa. Obtíže může způsobovat také spojení „třikrát více než“. Tyto jazykové jevy mohou některým žákům komplikovat porozumění zadání.

Úlohy na tomto pracovním listu je proto vhodné zadat jako skupinovou práci. Žáci tak dostanou prostor ke společnému uchopení zadání, porovnání jeho porozumění a diskusi nad řešením.

Úloha 2 (PL 12)

Úloha se bude žákům řešit lépe ve skupině, protože společně snadněji vytvoří návrh a precizují formulaci svého nápadu do písemné podoby. Po každé skupinové práci je vhodné vzájemně mezi skupinami sdílet řešení, poznatky i překážky, které žáci při řešení překonávali.

Úlohu lze zadat také jako důkaz o učení v rámci individuální práce, například pro ověření porozumění u jednotlivých žáků.

Pracovní list 13

Cíl:

- Žák doplní do tabulky chybějící údaje, které vyhledá v textu.
- Žák doplní údaje do diagramu na základě údajů v tabulce.
- Žák porovná údaje zaznamenané v tabulce a diagramu.
- Žák vyhledá chybějící údaje v diagramu/tabulce a zpracuje je z tabulky do diagramu a obráceně.

Úloha 1 (PL 13)

Úlohu žáci řeší nejdříve individuálně a poté sdílejí svá řešení ve dvojici. Předpokládáme, že po předchozích zkušenostech s evidencí dat do tabulky by úloha neměla činit žákům větší obtíže. Je přínosné, když žáci, kteří mají tabulku hotovou, si vzájemně kontrolují svá řešení. Po kontrole pak mohou nabídnout pomoc těm, kteří ji potřebují a řeknou si o ni.

Úloha 2 (PL 13)

Příležitost k obohacení zkušeností se sloupcovými diagramy nabízí společná diskuse nad řešením úlohy 2. Učitel může podněcovat diskusi otázkami typu:

- *Kde vidíme záznam, kolik osobních aut projelo v pondělí?*
- *Proč mají sloupce v diagramu různé barvy?*
- *Jak poznáme, co který sloupec zachycuje?*
- *Který údaj nám chybí u pondělí?*
- *Kde jej můžeme najít?*
- *Jakým způsobem jsou počty jednotlivých dopravních prostředků do diagramu zaznamenány?*

Společně pak na tabuli přeneseme do diagramu údaj vyhledaný v tabulce o počtu nákladních aut, která po silnici projela v pondělí. V další části pokračují žáci samostatně, případně ve dvojicích nebo menších skupinách, pokud někdo potřebuje pomoc.

Úloha 3 (PL 13)

Tato úloha je náročnější, protože žáci porovnávají dva různé způsoby záznamu dat (tabulku a diagram) a doplňují, co v jednom nebo druhém způsobu chybí. Úloha tak dobře prověří míru porozumění souvislostem mezi daty v tabulce a diagramu, schopnost číst informace z obou zdrojů a správně je zaznamenávat.

Za přínosnou považujeme skupinovou práci při řešení úlohy. Diskuse nad porovnáváním dat v tabulce a diagramu a společné určování, která chybějící data je třeba doplnit, odkud je získat a kam je zaznamenat, přispějí k hlubšímu porozumění tomu, jak data číst, zaznamenávat je do tabulky či diagramu a přenášet je z jednoho do druhého.

Pracovní list 14

Cíl:

- Žák vyhledá potřebná data v diagramu a využije je pro řešení úloh.
- Žák na základě vyhodnocení dat formuluje predikci budoucího chování dat.

Otázky navazují na informace z předchozích úloh a dávají dohromady získaná data ze sledování počtu aut za jednotlivé dny. Tato data jsou zpracována do vizuální podoby pomocí sloupcového diagramu. Stupnice diagramu nezačíná od jedné, ale až od čísla 25. Počkejme, zda si žáci této skutečnosti sami všimnou, např. při řešení prvních úloh, a sledujme, zda jim způsobí nějaké komplikace. V diskusi budeme hledat odpovědi, proč tomu tak je, zda data i přesto odpovídají datům, se kterými jsme pracovali v předchozích úlohách, a proč bylo jako výchozí číslo na stupnici zvoleno zrovna číslo 25.

Úlohy a) až d) jsou zaměřeny na ověření dovednosti orientovat se v diagramu (histogramu) a žáci je proto mohou řešit postupně a samostatně. V třídní diskusi pak porovnávají a zdůvodňují svá řešení. Každý žák tak získává zpětnou vazbu o své schopnosti řešit danou úlohu samostatně a zároveň o tom, zda dokáže aplikovat způsoby řešení prezentované ostatními žáky.

Poslední **úloha e)** je zaměřena na predikci s oporou o životní zkušenosti žáka. Neexistuje správné nebo chybné řešení této úlohy. Jde jen o to, jakým tvrzením žák zdůvodňuje své řešení. Např.: „V neděli pojede přibližně stejně aut jako v pátek, protože se lidé, co jeli na víkend pryč, zase vracejí.“ apod.

Pracovní list 15

Cíl:

- Žák určí aritmetický průměr malého souboru dat.

Předpokládáme, že žáci jsou již zorientováni v předloženém sloupcovém diagramu. Cílem pracovního listu je zavést pojem (aritmetický) průměr. Samotné slovo průměr přitom není explicitně vymezeno, ale je zavedeno pomocí dvou konkrétních ukázek procesu, jak jej zjistit. Při úvodní diskusi učitel monitoruje znalosti žáků a případně zapíše jednotlivé názory na tabuli, aby se k tomu ke konci hodiny mohl vrátit. Poté si žáci buď samostatně, nebo ve skupinkách přečtou podúlohu a) a snaží se porozumět tomu, jak dvě děti z údajů o dvou sledovaných dnech zjišťují **průměrný** počet aut za den. Zároveň si vzájemně vysvětlují jejich postup.

Marek popsal svůj postup a nyní je na žácích, aby odhalili, jakým způsobem získal průměr 46 z čísla 92 (45 + 47). Žáci brzy přijdou na to, že číslo 92 vydělil dvěma. Je vhodné vyzvat žáky, aby zdůvodnili, proč Marek dělil právě dvěma.

Eliška přišla s jinou myšlenkou, která vychází z vizualizace a manipulace, nikoli z výpočtu. Všimla si, že když přenese jeden křížek ze sloupce středa do sloupce úterý, budou sloupce stejně vysoké – 46 aut. A právě tato hodnota odpovídá průměru. Porozumění oběma postupům prověřuje podúloha b). Průměr za pondělí a úterý je 48; Eliška by přemístila tři křížky. Průměr za čtvrtek a pátek je 54; Eliška by přemístila čtyři křížky.

Následuje diskuse o výhodách a nevýhodách postupu Marka a Elišky. Každý z nich má své plusy i minusy – Markův postup je rychlý, využitelný pro velká čísla nebo pro počítání průměru za více dní (např. (45 + 47 + 50 + 58) : 4 = 50). Eliščin postup dává vizuální informaci o tom, co je průměr. Učitel vyzve žáky, kteří již úloze dobře rozumějí, aby vysvětlili, jak by Eliška postupovala, kdyby neznala konkrétní počty aut v jednotlivých dnech. Tím jsou žáci vedeni k práci s neurčitým číslem a ke zobecňování.

Sebehodnocení k tomuto PL je uvedeno na úvodní straně kapitoly 3.

Pracovní list 16

Cíl:

- Žák určí chybějící údaj na základě znalosti aritmetického průměru malého souboru dat.
- Žák řeší úlohy s využitím vazby mezi průměrem a jednotlivými daty.

Řešením podúlohy c) prohlubujeme porozumění pojmu „průměrný počet“ tím, že postupujeme od výsledku zpět. Známe průměrný počet aut za sobotu a neděli (37), z diagramu zjistíme počet aut za sobotu (25) a následně určujeme počet aut za neděli. Je vhodné, aby si žáci vyzkoušeli oba postupy, Markův i Eliščin. Eliška: Do obou sloupců, soboty i neděle, doplním křížky do 37. Spočítám, kolik křížků je v sobotu nad číslem 25: 37 − 25 = 12. Těchto 12 křížků „vrátím“ do neděle. Vyjde mi 49: 37 + 12 = 49. Marek: Celkem za sobotu a neděli projelo 74 aut: 37 + 37 = 74. V sobotu projelo 25 aut, takže v neděli projelo 74 − 25 = 49 aut. Eliščin postup pravděpodobně ocení zejména žáci, kteří si zatím nevytvořili dobrou představu o číslech a operacích s nimi. Učitel je může nechat u Eliščina postupu tak dlouho, dokud pro ně bude použitelný. Postupně pak mohou pocítit potřebu přejít k Markovu způsobu řešení.

Řešením podúlohy d) dále prohlubujeme porozumění vazbě mezi průměrem a jednotlivými daty. Žák, který rychle odpoví na otázky (o 1 větší, o 1 menší, o 3 větší, o 2,5 větší), již postupu výpočtu průměru dobře rozumí a pravděpodobně preferoval postup Elišky. Ten žák, který znovu počítá (51 + 47) : 2 = 49, je na dobré cestě.

Řešením podúlohy e) rozvíjí žák svou schopnost analogie. Návod na výpočet průměru za tři dny formuluje analogicky k návodu pro dva dny. Oba dva návody, Marka i Elišky, je zde možné využít.

Řešením podúlohy f) žák prohlubuje porozumění vazbě mezi průměrem a celkovým počtem. Celkový počet by se zvýšil o 6 (3 × 2).

4. kapitola DATOVÁ UTKÁNÍ – Evidujeme a porovnáváme výkony, vyhodnocujeme výsledky

Vstup do tématu

S tabulkou pracuje také druhá uvolněná úloha šetření TIMSS 2023 (ME71135). Zde měli žáci porovnávat údaje o získaných počtech bodů, kterých dosáhly čtyři děti ve třech kolech hry. Při řešení úlohy byli žáci dle výsledků šetření převážně úspěšní. Nejčastějším zdrojem chyb byla práce s více podmínkami.

Protože samotná úloha většině žáků nečinila velké obtíže, následující série úloh využívá převážně jen téma evidence sportovních výsledků. Žáci se v těchto úlohách postupně seznamují s tím, jak vytvářet tabulky a orientovat se v nich. Tabulky zachycují, kdo s kým hrál, a evidují výsledky jednotlivých zápasů včetně získaných bodů. Dovednost zaznamenávat data do tabulky a pracovat s ní je důležitá pro řešení mnoha matematických úloh, zejména z oblasti kombinatoriky a pravděpodobnosti.

Dříve než se pustíme do řešení úloh na jednotlivých pracovních listech, opět je dobré zahájit téma vstupní aktivitou. Dotkneme se v ní nejen hledání způsobu, jak připravit tabulku pro sehrávku a záznam výsledků zápasů každý s každým, ale i oblasti kombinatoriky. Oba úkoly aktivity jsou vhodné pro řešení ve skupinách a následnou společnou diskusi o navržených možnostech.

Úkol 1:

Turnaje se zúčastní čtyři děti – Marek, Tereza, Jirka a Jana.

Kolik zápasů se odehraje, když má hrát každý s každým?

Úkol 2:

Navrhni, jak by mohla vypadat tabulka, kam bude možné přehledně zapisovat výsledky jednotlivých zápasů těchto čtyř dětí.

Pracovní list 17

Cíl:

- Žák najde a doplní výsledky jednotlivých zápasů čtyř hráčů do tabulky výsledků.
- Žák navrhne způsob organizace dat z tabulky pro jiný cíl.

Úloha 1 (PL 17)

Pokud řešením úlohy 1 navazujeme na navrženou aktivitu v úvodu této kapitoly s úkoly 1 a 2, žáci si nejprve porovnají, zda ve svých návrzích na záznam jednotlivých zápasů dospěli k podobné tabulce, jako je zde, či nikoliv. Je vhodné porovnat různé žákovské záznamy a posoudit jejich přehlednost a efektivnost pro vyhledávání různých odpovědí.

Možná bude potřeba sjednotit způsob, jakým budeme z tabulky číst a zapisovat výsledky. Pro tabulky uvedené na pracovním listu 17 platí, že jako první čteme jméno ze svislého záhlaví a jako druhé jméno z vodorovného záhlaví. Výsledek v prvním řádku tabulky tedy čteme takto: Marek vyhrál nad Terezou 19:18. To znamená, že Marek získal 19 bodů a Tereza 18 bodů. Tento výsledek můžeme ihned přenést také do druhého řádku a prvního sloupce, ovšem v opačném pořadí: Tereza prohrála s Markem 18:19.

Úloha 1 ověřuje, zda se žáci orientují v podobných typech tabulek, se kterými již někteří mohou mít zkušenosti například ze sportu. Žáci by měli dokázat v tabulce vyhledávat údaje o skóre jednotlivých zápasů a zároveň doplňovat chybějící data.

Největším objevem, obzvláště pro žáky, kteří s tabulkami z turnajů nemají tolik zkušeností, bývá zjištění, že každé skóre (každý zápas dané dvojice hráčů) se v tabulce objevuje dvakrát, ale že záleží na pořadí, jak výsledné skóre do tabulky zapíšeme, aby bylo jasné, kdo vyhrál.

Pokud žáci s těmito tabulkami nemají žádnou zkušenost, necháme je i tuto skutečnost odhalit. Například se můžeme ptát, zda je možné z tabulky určit, kdo z dvojice hráčů vyhrál, případně jak tabulku upravit tak, aby to z ní bylo patrné.

Ideální je situace, když diskutují dva žáci, kteří mají výsledky zapsány opačně. Z diskuse vyplyne, že je potřeba se domluvit, popř. přijmout konvenci zápisu sportovních výsledků.

Sebehodnocení formou zabarvování JČTÚ udělají žáci hned po úloze 1, kdy vyhodnocují míru své úspěšnosti se zanášením dat do tabulky sportovních výsledků.

Úloha 2 (PL 17)

Úloha 2 je vhodná pro skupinovou práci. Ve skupině by si měli žáci nejdříve v diskusi zajistit porozumění, popřípadě se doptat ostatních nebo učitele. Proto je vhodné raději volit heterogenní skupiny, aby v každé skupině byl alespoň jeden žák schopen ostatním pomoci a vyjasnit, co bude potřeba.

Hledání odpovědí přímo z doplněné tabulky na této straně pracovního listu je poměrně složité, a proto stojí za to sledovat, jak si s tím jednotlivé skupiny poradí. Začne si někdo informace zjednodušeně vypisovat? Udělá si někdo k původní tabulce nějaký přehled? Vybarví si nějaká políčka v tabulce či si do ní začne dopisovat nějaké další informace? Nebo si žáci vytvoří novou tabulku, kde už budou mít uvedeny pouze informace potřebné k řešení? Přínosná je také následná prezentace způsobů řešení jednotlivých skupin a diskuse o jejich efektivitě. Porovnáváním různých řešitelských strategií rozvíjíme u žáků jejich metakognici.

Úloha 3 (PL 17)

Žáci si mohou sami zvolit, jak chtějí úlohu řešit – samostatně, ve dvojicích, případně ve skupinách z minulé hodiny. Nyní mají zanést do předem připravené tabulky informace, se kterými pracovali předešlou hodinu, a porovnat, zda se jim odpovědi na otázky nyní hledají lépe než předchozí den.

Pokud již při řešení úlohy 2 žáci sami vytvořili efektivní způsoby vyhledávání odpovědí na jednotlivé otázky, může být pokračování úlohy 2 využito pouze jako doplňující aktivita, například k ověření porozumění u jednotlivých žáků.

S daty, která si žáci v této úloze do tabulky zanesou, budou pak dále pracovat i v následujících úlohách na dalších PL. Proto je potřebné zkontrolovat jejich správnost.

Pracovní list 18

Cíl:

Na základě vyhledání dat uvedených v tabulce:

- Žák odpoví na otázky.
- Žák rozhodne o správnosti a nesprávnosti tvrzení.
- Žák formuluje správné a nesprávné tvrzení vztahující se k datům v tabulce.
- Žák porovná údaje v tabulce a v diagramu.

Řešení úloh na pracovním listu přináší žákům také zkušenosti s úlohami s volbou odpovědi. Takové typy úloh se často vyskytují v různých testech včetně přijímacích, ale v učebnicích zařazovány nejsou. Přemýšlení o nabídce odpovědí probíhá jinak, než když žák úlohu vyřeší a pak vyhledá svůj výsledek v nabídce. Je důležité seznámit žáky i se strategií vyloučení možností, které určitě pravdivé nejsou, anebo s postupem od výsledků v nabídce možností a ověřením jejich správnosti porovnáním se zadáním. U některých úloh je pouze jedna správná odpověď, u některých je jich více.

Pracovní list 19

Cíl:

- Žák rozhodne o pravdivosti tvrzení na základě vyhledání dat v tabulce.

Pro posilování čtenářské gramotnosti, která je klíčová i pro matematiku, je zařazena také úloha zaměřená na posuzování pravdivosti různých tvrzení na základě dat uvedených ve výchozí tabulce. Při volbě ze dvou možností, například ANO/NE, je třeba předejít pouhému hádání. Je-li správná právě jedna možnost a žák volí každou z možností se stejnou pravděpodobností, má pravděpodobnost správné odpovědi 50 %. Žáci by proto měli svou odpověď vždy zdůvodnit.

Pracovní list 20

Cíl:

- Žák porovná údaje zanesené v tabulce a diagramu.
- Žák správně interpretuje data zanesená v tabulce a diagramu.
- Žák uvede příklad, jak ovlivňuje volba stupnice ve sloupcovém diagramu interpretaci zadaných dat.

Úloha 1 (PL 20)

Úloha je zaměřena na to, aby žáci odhalili, že určitou úpravou diagramu lze stejná data vizualizovat způsobem, který může vést k jejich nesprávné interpretaci. Taková zkušenost má velký význam pro život, neboť tímto způsobem mohou s daty manipulovat například i novináři či politici.

V úloze je „záludné“, že u sloupcového diagramu není uvedena svislá osa se stupnicí a že dolní část diagramu je zakryta. Víme, že sloupcový diagram zobrazuje počty bodů jednotlivých žáků ve třetím kole hry, což odpovídá poslednímu řádku tabulky. Tedy pro vyřešení úlohy je potřeba se nejdříve zorientovat v jednotkách na svislé ose.

Úloha je vhodná pro **diferenciaci**. Žákům, kteří se již dobře orientují v diagramech, můžeme úlohu nabídnout k řešení tak, jak je. Žákům, kteří potřebují menší dopomoc, dáme nejdříve za úkol, aby si sami vytvořili diagram pro třetí kolo hry podle tabulky a pak porovnali svůj diagram s tím v úloze a posoudili, co mají společného.

Žáky, kteří potřebují větší podporu, provedeme úlohou 2. Klademe otázky a formulujeme dílčí úkoly na porovnávání údajů v tabulce a v diagramu, například: Kolik bodů získal ve 3. kole Marek? Najdi tento údaj v tabulce. Zapiš jej do diagramu ke sloupci Marek. Totéž udělej pro Terezu. Kdo získal více bodů, Marek, nebo Tereza? O kolik? Jak to poznáš z tabulky a z diagramu? Co v diagramu znamená jeden dílek? Totéž udělej pro Jirku a Janu. Čísla zapsaná v diagramu u sloupců přenes na levý kraj k vodorovným čarám a vytvoř svislou stupnici. Jakým číslem stupnice začíná? Doplň daný sloupcový diagram tak, aby stupnice začínala 10, …, 3, …, 0 body.

Pokud bude úloha žáky bavit, můžeme je na závěr vyzvat k úpravě diagramu, která bude vyvolávat dojem, že Tereza nebo Jana získala dvojnásobný počet bodů oproti Jirkovi.

5. kapitola DATA VE SPOJENÍ – Porovnáváme data a hledáme mezi nimi souvislosti

Vstup do tématu

Tato kapitola přináší pokročilejší práci s daty. Úlohy se zde soustředí nejen na posílení dovednosti žáků přenášet data mezi různými typy diagramů, grafem a tabulkou, ale i na vyhodnocování dat na základě porovnání údajů z různých zdrojů. Se zvyšující se zkušeností s různými druhy vizualizací dat vedou úlohy žáky také k posuzování, který typ diagramu nebo grafu se pro zachycení daných dat hodí a který ne. Sledují tak, jak zvolená stupnice ovlivňuje vizuální podobu zachycení informací vyplývajících z dat.

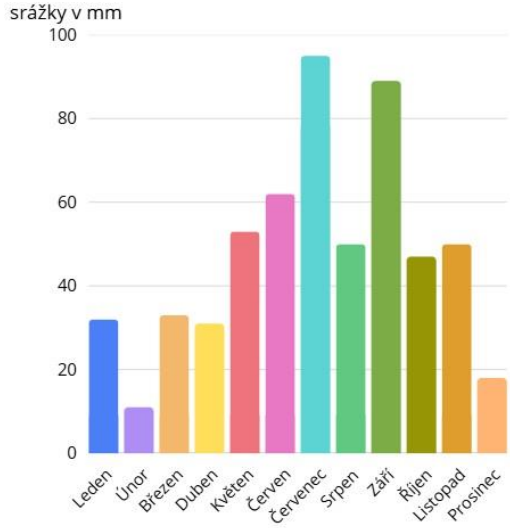
Graf, nebo diagram?

Výrazy graf a diagram se jako označení různých způsobů vizualizace dat mnohdy používají nejednotně, proto zde jejich význam upřesníme. Názvy a značky školské matematiky pro znázornění datových souborů uvádějí sloupcový diagram, spojnicový diagram a kruhový diagram.

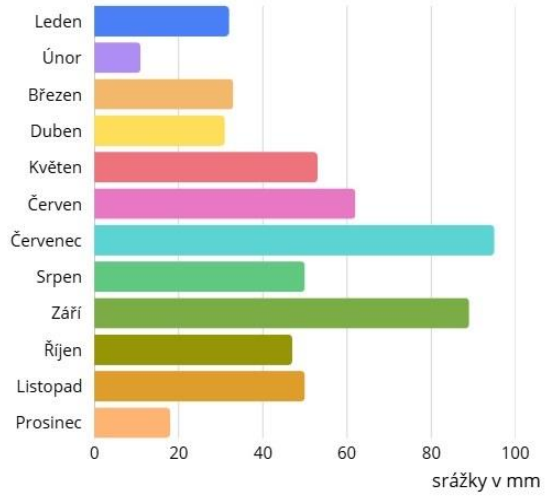
V této publikaci používáme jako synonymum pro spojnicový diagram označení spojnicový **graf** pro zobrazení hodnot pomocí bodů propojených čarou v souřadnicové soustavě. Pro zobrazení pomocí sloupců, pruhů nebo kruhových výsečí používáme označení diagram.

Obrázky 5 až 8 ukazují sloupcový **diagram, pruhový diagram, kruhový diagram a spojnicový graf**.

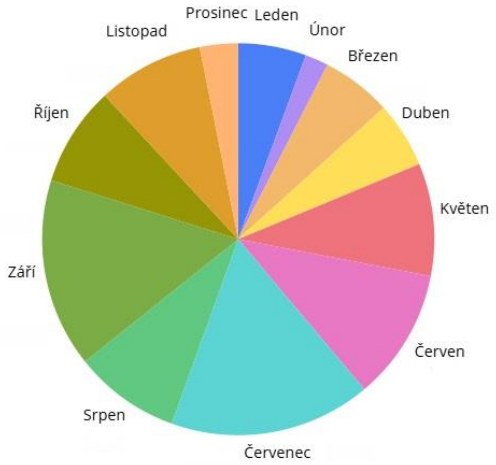
OBRÁZEK 5 | Sloupcový diagram



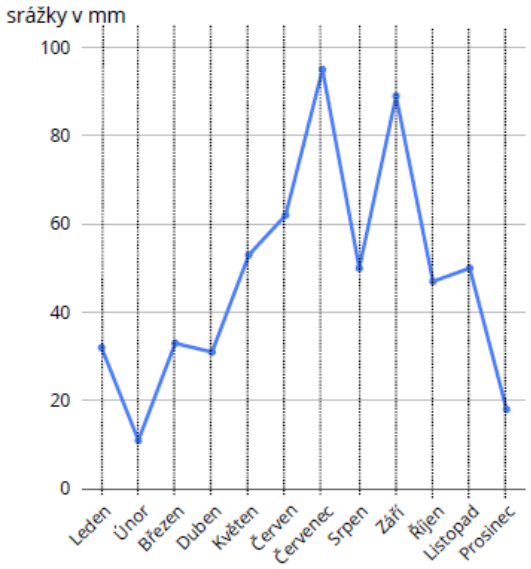
OBRÁZEK 6 | Pruhový diagram



OBRÁZEK 7 | Kruhový diagram



OBRÁZEK 8 | Spojnicový graf



Pracovní list 21

Cíl:

- Žák vyhledá data ve spojnicovém grafu a zapíše je do tabulky.
- Žák zakreslí spojnicový graf podle dat uvedených v tabulce.
- Žák porovná data zakreslená ve spojnicových grafech s různou škálou na stupnici.

Úloha 1 (PL 21)

Úloha 1 je zařazena jako vstupní seznámení se spojnicovým grafem pro žáky, kteří s ním nemají zatím zkušenosti. Vstupem do úlohy je úvodní diskuse třídy o tom, co vše je možné z grafu vyčíst. Diskusi může učitel směrovat otázkami: Jaké údaje najdeme na vodorovné a jaké na svislé ose? Jak vyčteme, jaká byla teplota v konkrétní den? Co znamená, když spojnicová křivka směřuje nahoru nebo dolů? Apod.

Obdobným způsobem lze společně uchopit i základní orientaci v tabulce. Vhodné je společně zapsat do tabulky první hodnoty, aby každý žák rozuměl tomu, co a jak má dělat. Několik údajů zapíše každý žák do tabulky samostatně. Žák i učitel tak získají zpětnou vazbu o tom, nakolik žák rozumí datům a jejich organizaci. Dovednost přenést data z grafu do tabulky bude žák potřebovat pro řešení dalších úloh v této kapitole.

Úloha 2 (PL 21)

Úloha 2 i 3 vedou žáky nejen k posilování dovednosti číst data ze spojnicového grafu, ale i ke sledování změn jeho průběhu v závislosti na rozvolnění nebo zhuštění stupnice na svislé či vodorovné ose. Žáci tak získávají první zkušenosti s tím, jak lze vizuální podobu grafu ovlivnit např. vhodnou volbou stupnice. Toto téma je pak dále rozvinuto i v následující kapitole pracovního sešitu. Základem práce s úlohou 2 by měla být diskuse žáků, a to buď celé třídy, nebo nejprve ve skupinách. V diskusi by mělo zaznít, že i když oba grafy zachycují stejné hodnoty, jejich podoba se liší z důvodu odlišné stupnice na svislé ose. A to je i důvod, proč se na pravém grafu zdají proměny teploty daleko výraznější než na levém grafu.

Úloha 3 (PL 21)

Úloha 3 navazuje na předchozí úlohu a vede žáky k dovednosti buď samostatně, nebo ve skupině vytvořit spojnicový graf se stejnými údaji jako v úloze 1 i 2 do připravené šablony. Žáci se tak učí nejen přenášet data z tabulky do grafu, ale především sledují, jak se jeho vizuální podoba mění při prodloužení či zkrácení jednotky na vodorovné ose. Mnoho poznatků o tom, jak volba stupnic na obou osách ovlivňuje celkovou podobu grafu, žáci získají z učitelem moderovaných diskusí o tom, jak se mění průběh spojnicových grafů v úlohách 1 až 3.

Pracovní list 22

Cíl:

- Žák vyhledá data v kruhovém diagramu a využije je pro řešení úloh.

Úloha 1 (PL 22)

Práce s kruhovým diagramem navazuje na žákovy zkušenosti s kruhovým modelem zlomků a s tématem vztahu celku a jeho části. Z tohoto důvodu je vhodné nechat žáky nejprve úlohu samostatně uchopit a teprve potom otevřít diskusi o jejích řešeních. V úloze má žák prokázat základní orientaci ve čtení dat z kruhového diagramu tím, že k diagramu správně doplní legendu a vysvětlí svůj způsob řešení, například takto: „Kruh znázorňuje počet dní v týdnu. Jestliže slunečných dní bylo nejvíce, musí být znázorněny největší částí kruhu, a ta je žlutá."

Úloha 2 (PL 22)

Pro vyřešení úlohy je potřeba propojit data ze dvou zdrojů – z kruhového diagramu z úlohy 1 a ze spojnicového grafu na předchozím pracovním listu. Úkolem žáka je vytvořit novou evidenci počasí v průběhu týdne v podobě tabulky. Doporučený postup spočívá v tom, že žák nejprve odečte hodnoty denních teplot ze spojnicového grafu. Na základě těchto hodnot, tří podmínek ze zadání a údajů z kruhového diagramu pak do připravené tabulky doplní počasí v jednotlivých dnech. Pro hlubší porozumění souvislostem mezi třemi zdroji dat je vhodné nechat alespoň rychlejší žáky přenést údaje z tabulky do kruhového diagramu, například dopsat ke žluté části dny, kdy bylo slunečno (čt, so, ne), a do spojnicového grafu, například obarvit příslušné body na žluto.

Pracovní list 23

Cíl:

- Žák vyhledá a porovná data ve spojnicových grafech a využije je pro řešení úloh.
- Žák na základě sledování vývoje dat ve spojnicovém grafu vytvoří predikci jeho dalšího průběhu.

Úloha 1 (PL 23)

V úloze 1 žák pracuje se souborem dat znázorněných ve složeném spojnicovém grafu, v němž porovnává mezi sebou průběh průměrných teplot v jednotlivých měsících během různých let.

V úlohách a) až c) žák vyhledává konkrétní hodnoty a porovnává je podle zadaných podmínek. Postupně se však náročnost otázek zvyšuje a žák již nesleduje pouze jednotlivé body grafu, ale také změnu hodnot mezi dvěma sousedními měsíci a rozdíly mezi jednotlivými roky. Úloha tak cílí na rozvoj orientace ve větším množství současně zobrazených dat a vyhledávání vztahů mezi nimi.

U posledního zadání je vhodné nechat žáky hledat více možností a následně jejich řešení společně porovnat. Pozornost tak není zaměřena pouze na nalezení jedné správné hodnoty, ale také na systematické procházení dat a ověřování, zda zadanou podmínku splňují i další dvojice hodnot.

Dá se předpokládat, že práce s tímto složeným spojnicovým grafem již bude pro mnohé žáky velmi obtížná, je však přirozeným pokračováním rozvoje zkušeností získaných v předchozích úlohách. Přesto lze jako cíl úlohy na 1. stupni ZŠ stanovit pouze seznámení žáka se čtením dat z tohoto typu grafu a získání základní zkušenosti. Úloha je proto vhodná také pro 2. stupeň ZŠ, kde by již žák měl dosáhnout hlubšího porozumění čtení a porovnávání dat i ze složených grafů nebo diagramů.

Úloha 2 (PL 23)

Úloha 2 již přesahuje pouhé čtení dat ze spojnicového grafu. Žák má na základě sledování průběhu teplot v předchozích pěti letech odhadnout hodnoty pro jednotlivé měsíce v roce 2025. Neexistuje zde jedna předem daná správná odpověď. Důležité je především to, zda žák dokáže svůj odhad opřít o data, která má k dispozici, a vysvětlit, z čeho při jeho tvorbě vycházel. Velice důležitou roli zde tedy hraje společná diskuse třídy, kdy žáci hledají a formulují argumentace pro své odhady.

Práce s touto tabulkou je pro žáky trochu jako hra. Proto je vhodné, když si každý zkusí udělat své odhady sám. Údaje totiž vychází ze skutečných statistických dat, a proto si žáci mohou porovnat své odhady se skutečně naměřenými

průměrnými hodnotami a poté sledovat, jak přesné byly jejich odhady. Hodnoty průměrných teplot v roce 2025 žák najde v příloze 4 a pro snazší srovnávání si je vystřihne a nalepí hned pod tabulku se svými již vyplněnými odhady. Společná diskuse k porovnání reality s odhadem pak otevírá prostor pro získávání zkušeností s interpretací dat a s predikcí jejich dalšího vývoje.

Pracovní list 24

Cíl:

- Žák porovná různé způsoby zpracování dat a posoudí jejich vhodnost pro sledování určitého jevu.
- Žák uvede alespoň jednu situaci, pro kterou se hodí nebo nehodí data zpracovaná sloupcovým diagramem, spojnicovým grafem a kruhovým diagramem.
- Žák propojí informace z více zdrojů dat a na jejich základě formuluje závěry a zdůvodní je.

Úloha 1 (PL 24)

V úloze 1 se žák setkává se stejným souborem dat zpracovaným čtyřmi různými způsoby – pruhový diagram, spojnicový graf, kruhový a sloupcový diagram. U těchto úloh se očekává, že žák na základě práce s množstvím předchozích úloh má již dostatek zkušeností se čtením dat v těchto typech grafického zpracování dat, a proto zaměříme pozornost také na rozvoj dovednosti kriticky posoudit, který způsob znázornění dat je vhodný pro konkrétní účel. Žák si tak postupně vytváří zkušenost, že různé způsoby zpracování dat mohou některé informace zvýraznit, jiné naopak skrýt nebo znesnadnit jejich čtení. V této úloze by také již mělo dojít k upevnění správného pojmenování těchto čtyř způsobů zobrazení dat.

Při práci doporučujeme nechat žáky nejprve úlohu promyslet samostatně a pak ve dvojici nebo ve skupině svá rozhodnutí porovnat. Následná společná diskuse by měla ukázat, že vždy nemusí existovat pouze jedno přijatelné řešení a že vhodnost způsobu zobrazení závisí také na tom, co chceme z dat zjistit. Velmi cenný zde je prostor pro podněcování žáků k formulaci jasných tvrzení a jejich argumentace, proč je některý typ zobrazení dat vhodnější pro danou situaci než jiný. Zvláštní pozornost můžeme věnovat kruhovému diagramu. Ten umožňuje dobře porovnávat podíl jednotlivých měsíců na celkovém množství srážek, ale není příliš vhodný pro přesné určování jednotlivých hodnot. U spojnicového grafu je naopak vhodné otevřít otázku, co nám přináší spojení jednotlivých bodů a proč je tento způsob užitečný zejména při sledování vývoje hodnot v čase.

Úloha 2 (PL 24)

V úloze 2 žák pracuje se stejnými daty současně v tabulce a pruhovém diagramu. Nejprve vyhledává tři měsíce s největším počtem požárů a následně vyhodnocuje, ve kterém způsobu zpracování dat se mu informace hledala snadněji a jak při hledání postupoval. Úloha proto kromě samotného čtení a porovnávání hodnot rozvíjí také schopnost žáka uvědomovat si vlastní strategii při práci s daty. Při řešení není nutné žákům předem doporučovat, zda mají použít tabulku nebo diagram. Naopak je vhodné nechat je hledat a pozorovat, jaký postup zvolí, a pak až společně zpětně strategie porovnat a vyhodnocovat jejich efektivnosti. Někteří žáci začnou hledat nejvyšší hodnoty v tabulce, ale jiní využijí přehlednosti vizualizace hodnot pruhového diagramu. V diskusi bude opět dobré, aby zaznělo, že oba způsoby mají své výhody i nevýhody. Diagram usnadňuje rychlé porovnání, ale tabulka umožňuje přesnější práci s konkrétními hodnotami.

Úloha 3 (PL 24)

Úloha 3 představuje další posun v práci s daty. Žák opět pracuje s několika datovými soubory a současně porovnává počet požárů, množství srážek a průměrnou teplotu v jednotlivých měsících roku. Jeho úkolem je hledat mezi daty možné souvislosti a pokusit se pomocí nich vysvětlit, proč dochází v některých obdobích k většímu množství požárů.

Svou náročností úloha odpovídá spíše učivu 2. st. ZŠ, ale opět pokud žák má dostatek zkušeností s řešením úloh s prací s daty, je tato úloha dobrým podnětem pro získávání vhledu do zpracování dat a zároveň v propojení s reálným životem.

Úloha by neměla směřovat k nalezení jediné „správné příčiny“. Je vhodné vést žáky k tomu, aby svá tvrzení opírali o konkrétní údaje. Místo odpovědi „v létě je více požárů, protože je teplo“ je můžeme otázkami vést k přesnějšímu vyjádření: *Co ukazují data o teplotě? Jaké byly v tomto období srážky? Platí tato souvislost ve všech měsících? Najdeme měsíc, který našemu vysvětlení neodpovídá?* Právě hledání takových výjimek může být pro rozvoj práce s daty velmi cenné.

Doporučujeme nechat žáky nejprve porovnávat vždy pouze dva jevy, například počet požárů a teplotu, případně počet požárů a množství srážek, a teprve následně všechny tři datové soubory propojit. Žáci si mohou jednotlivé měsíce označovat, vyhledávat maxima a minima nebo hledat období, kdy se hodnoty mění podobným či opačným směrem.

Závěrečnou diskusi je vhodné využít také k rozlišení mezi souvislostí a příčinou. Z dat můžeme například pozorovat, že v některých měsících se vyšší počet požárů objevuje současně s vyššími teplotami nebo nižším množstvím srážek. Samotná zobrazená data však ještě nedokazují, že právě jedna z těchto veličin požáry způsobila. Nabídka využít při vysvětlení vlastní zkušenost proto umožňuje žákům přemýšlet o dalších faktorech, které v grafech zachyceny nejsou. Tím se úloha posouvá od pouhého čtení dat ke kritickému posuzování, vyhodnocování a interpretaci dat včetně formulování závěrů podložených dostupnými údaji.

6. kapitola DATOVÁ KAMUFLÁŽ – Odhalujeme zavádějící diagramy, grafy a tvrzení

Vstup do tématu

Kapitolu Datovou kamufláž lze pro žáky 1. stupně považovat za nadstavbovou, ale představuje důležitou součást rozvoje porozumění práci s daty. Při práci s tabulkami, diagramy a grafy totiž nestačí pouze umět údaje správně přečíst a vyhledat. Stejně důležité je naučit se posuzovat, jakým způsobem jsou data zobrazena, jaký dojem jejich zpracování vytváří a zda závěry, které jsou s nimi spojovány, skutečně z uvedených dat vyplývají.

Žáci se s grafickým znázorněním dat stále častěji setkávají i mimo školu – v médiích, reklamě, na sociálních sítích nebo při prezentaci různých výsledků a průzkumů. Graf nebo diagram přitom může působit velmi přesvědčivě a objektivně, i když způsob jeho zpracování některé rozdíly zvýrazňuje, jiné potlačuje nebo čtenářovu pozornost záměrně směruje určitým způsobem. Data přitom nemusí být sama o sobě chybná. Zavádějící může být například volba měřítka a rozsahu os, výběr pouze určité části dat, způsob jejich grafického znázornění nebo tvrzení, kterým je graf doplněn.

Práce s datovou kamufláží proto vede žáky od prostého čtení dat ke kritické interpretaci jejich zobrazení. Žák se učí nevycházet pouze z prvního vizuálního dojmu, ale také kriticky posuzovat způsob zobrazení dat. Postupně si vytváří návyk sledovat nejen samotná data, ale také popis os, jejich měřítko, rozsah zobrazených hodnot, časové období a další okolnosti, které mohou interpretaci ovlivnit.

Důležitou součástí těchto úloh je také zdůvodňování vlastního úsudku. Nestačí tedy pouze označit graf nebo tvrzení za zavádějící, ale je potřeba popsat, co konkrétně tento dojem způsobuje a jaké informace jej podporují. Žáci se tím učí oddělovat svůj první dojem od podloženého závěru a formulovat argumenty založené na důkazech.

V této kapitole je zařazena třetí uvolněná úloha TIMSS 2023, ME71201. S touto obtížnou úlohou si podle výsledků naši žáci poradili velmi dobře. Úspěšnost byla 75,6 %. Největší problém byl v interpretaci úkolu. To je ale problém všech úloh, jejichž řešení je závislé na kvalitě čtení s porozuměním. Proto i ve všech našich úlohách je potřeba si dříve ověřit, že žáci textu a svému úkolu porozuměli dobře.

V úvodním sebehodnotícím listu s kritérii jsou v tabulce kromě dvou předem formulovaných kritérií ponechána také dvě volná políčka. Ta poskytují učiteli prostor pro případné doplnění dalších kritérií společně se žáky, na která by se chtěl v závěru pracovního sešitu v rámci jejich sebehodnocení zaměřit. Kritéria zde mohou být nastavena nejen ve vztahu k obsahu učiva, ale také kompetenčně (např. ve vztahu k měkkým dovednostem), protože na tuto neméně významnou část žákova rozvoje se tento pracovní sešit ve svých výstupech cíleně nesoustředí.

Pracovní list 25

Cíl:

- Žák zvolí vhodný typ diagramu pro řešení dané úlohy.
- Žák rozpozná zkreslení způsobené nevhodně zvoleným počátkem osy a vysvětlí, jak ovlivňuje vizuální dojem z rozdílu hodnot.

Úloha 1 (PL 25)

V první úloze žáci pracují se stejnými daty zachycenými v tabulce, ve sloupcovém a kruhovém diagramu. Jejich úkolem není pouze údaje přečíst, ale především posoudit vhodnost způsobu jejich zobrazení vzhledem k tomu, jakou informaci chceme z dat získat. Protože jednotlivé skupiny odpadu dohromady tvoří 100 kg, tedy jeden celek, je zde vhodná příležitost navázat na předchozí zkušenosti žáků s kruhovým diagramem a vztahem části a celku.

Doporučujeme nechat žáky nejprve rozhodnout samostatně, který diagram by pro daný účel zvolili, a teprve poté jejich volbu společně diskutovat. Podstatnější než samotná volba je její zdůvodnění.

Závěrečná otázka, zda více než polovinu směsného odpadu tvořil odpad, který bylo možné vytřídit, umožňuje propojit grafické znázornění s číselnými údaji. Žáci mohou k odpovědi dojít různými cestami – sečtením jednotlivých kategorií tříditelného odpadu, využitím skutečnosti, že celek tvoří 100 kg, nebo vizuálním posouzením kruhového diagramu. Je vhodné nechat jednotlivé strategie zaznít a porovnat jejich efektivitu.

Metodicky zde není nutné, aby hlavním cílem bylo dospět k tvrzení, že jeden typ diagramu je obecně „lepší“. Důležitější je pro žáky zkušenost, že vhodnost diagramu závisí na tom, co chceme z dat zjistit.

Úloha 2 (PL 25)

Úloha 2 přináší první výraznější zkušenost s jevem, který jsme nazvali datovou kamufláží. Žáci pracují s údaji, které jsou samy o sobě správné, ale způsob jejich grafického zobrazení vytváří dojem mnohem výraznějšího rozdílu mezi množstvím tříditelného a netříditelného odpadu, než jaký odpovídá skutečným hodnotám.

Doporučujeme žákům nejprve diagram pouze ukázat a nechat je spontánně popsat, jaký dojem v nich vyvolává. Teprve potom by měli začít zkoumat, proč tento dojem vzniká. Tím se dobře zdůrazní rozdíl mezi prvním vizuálním dojmem a následným hlubším zkoumáním způsobu zobrazení dat.

Zásadní je, aby žáci nezůstali pouze u konstatování, že „graf klame“, ale dokázali své tvrzení podložit konkrétními důkazy. Mohou tak například uvést, že příčinou je, že osa nezačíná nulou, ale hodnotou 40, zatímco skutečné hodnoty jsou 44 kg a 56 kg. Rozdíl mezi těmito hodnotami obou sloupců je pouze 12 kg, přesto neúplností škály svislé osy sloupce na první pohled působí, jako by jedna hodnota byla několikanásobně větší.

V této úloze je vhodné otevřít také důležitou myšlenku, že zavádějící diagram nemusí nutně obsahovat nepravdivá data. Pro žáky bývá právě toto zjištění podstatné. Číselné údaje mohou být správné, přesto může způsob jejich grafického zobrazení ovlivnit naše vnímání.

Úloha 3 (PL 25)

Ve třetí úloze žáci zavádějící zobrazení sami upravují. Stejné hodnoty 44 kg a 56 kg zakreslí do připraveného pruhového diagramu, jehož osa začíná nulou. Nejde tedy pouze o procvičení konstrukce diagramu, ale především o ověření, jak změna měřítka ovlivní vizuální dojem ze stejných dat. Po zakreslení hodnot by se žáci měli k oběma zobrazením vrátit a porovnat je.

Za velmi důležité považujeme, aby si žáci po této trojici úloh neodnesli pouze jednoduché pravidlo, že „osa musí začínat nulou“, ale především hlubší porozumění principům interpretace diagramů. Při jejich posuzování je totiž třeba sledovat nejen to, jaká čísla jsou zobrazena, ale také způsob, jakým jsou v diagramu zachycena. Právě způsob znázornění může významně ovlivnit následnou interpretaci prezentovaných dat.

Pracovní list 26

Cíl:

- Žák porovná různá zobrazení stejných dat a posoudí, jak volba měřítka ovlivňuje jejich interpretaci a tvrzení, které je grafem podporováno.

Úloha 1 (PL 26)

Úloha 1 navazuje na zkušenost z předchozího pracovního listu a posouvá pozornost od samotného grafického zpracování dat k tomu, jak jsou data využita k podpoře určitého tvrzení. Žák zde pracuje jak s grafem, tak s celým sdělením – titulkem, textem článku, grafem a komentářem, který graf interpretuje. Učí se tak rozlišovat mezi tím, co skutečně ukazují data, jaký dojem vytváří jejich zobrazení a jaký závěr z nich autor vyvozuje. Doporučujeme nechat žáky článek nejprve přečíst jako celek a zachytit jejich první dojem. Teprve následně obrátit pozornost ke konkrétním hodnotám v grafu. Otázky c) až e) záměrně vedou žáka zpět od celkového vizuálního dojmu k číslům: nejnižší hodnota je 3 000 l, nejvyšší 3 500 l a s každou další třídou se spotřeba zvyšuje vždy o 100 l. Žák tak může porovnat skutečný rozdíl hodnot s dojmem „prudkého nárůstu“, který graf a článek vyvolávají.

V diskusi je vhodné zaměřit pozornost na velikost jednotky na svislé ose, která má posunutý počátek do hodnoty 2 900 l. Rozdíl 500 l proto zabírá téměř celou výšku grafu a vizuálně působí výrazněji. Na rozdíl od sloupcového diagramu však není vhodné vytvářet pravidlo, že osa spojnicového grafu musí vždy začínat nulou. Zkrácení osy může být při sledování změn hodnot užitečné. Podstatné je, zda způsob zobrazení odpovídá účelu, pro který byl graf vytvořen, a zda není využíván k vytváření zkresleného dojmu.

Dalším důležitým tématem je kauzalita, rozlišování příčiny a důsledku. Zobrazená data ukazují, že se s rostoucím počtem tříd zvyšovala spotřeba vody. Data sama o sobě však nedokazují tvrzení článku, že za nárůstem stojí právě malování vodovými barvami, namáčení štětců nebo vymývání kelímků. Učitel může položit otázku: *Co bychom ještě*

potřebovali vědět, abychom mohli příčinu skutečně posoudit? Žáci tak získávají zkušenost, že problém nemusí spočívat v nesprávných datech, ale také v příliš silném závěru, který je na jejich základě formulován.

Metodicky může být užitečné společně rozdělit informace z článku do tří skupin: Co víme z grafu – co tvrdí autor – co z uvedených dat nevíme. Tím žáci získají konkrétní postup, který mohou později využívat i při kritickém čtení grafů v médiích.

Úloha 2 (PL 26)

V úloze 2 žáci pracují se stejným souborem dat zobrazeným různými způsoby. Mohou tak přímo sledovat, že změnou způsobu konstrukce grafu se nezmění žádná z hodnot, ale může se výrazně změnit dojem, který graf vytváří. Úloha je proto důležitým pokračováním předchozího zkoumání – žák již zavádějící dojem pouze neodhaluje, ale hledá konkrétní grafické prostředky, které jej způsobují.

Doporučujeme neprozrazovat žákům předem, v čem rozdíl spočívá. Mohou si nejprve všechny tři grafy porovnat a popsat, jak na ně jednotlivá zobrazení působí. Teprve poté hledají, co se změnilo. Pozornost by měla směřovat především na svislou osu a měřítko na ní, ale také k poměru výšky a šířky grafu. I graf se stejným rozsahem os může v úzkém a vysokém provedení působit dramatičtěji než graf roztažený do šířky. Žáci tak mohou zjistit, že způsob vizualizace dat zahrnuje více rozhodnutí než pouze volbu hodnot na ose. Podstatnou zkušeností žáka má být, že při interpretaci grafu musí sledovat nejen průběh čáry, ale také měřítko, rozsah os a celkové grafické uspořádání.

Pracovní list 27

Cíl:

- Žák rozpozná, že výběr pouze určitého úseku dat může vytvořit zavádějící obraz jejich celkového vývoje.

Úloha 1 (PL 27)

V úloze 1 se pozornost přesouvá od způsobu konstrukce grafu k další časté podobě datové kamufláže – výběru pouze takové části dat, která podporuje určité tvrzení. Samotné hodnoty uvedené v grafu nejsou chybné a také jeho měřítko není zavádějící. Problematické je především to, jaké časové období bylo pro prezentaci vybráno a jaký obecný závěr je na jeho základě formulován.

Pro didaktický účinek úlohy je vhodné, aby žáci při prvním řešení neviděli graf z úlohy 2. Pokud pracují s celým pracovním listem současně, můžeme je požádat, aby si jeho spodní část zakryli. Žáci tak mají možnost skutečně posoudit pouze informace, které měl k dispozici čtenář youtuberova příspěvku. Při společné diskusi, která může navázat na diskusi nad úlohou ve skupině, je důležité rozlišit dvě otázky: Co skutečně ukazuje graf? Co o videu tvrdí jeho autor? Graf zachycuje pouze šest hodin, konkrétně 43.–48. hodinu od zveřejnění, a v tomto období počet zhlédnutí za hodinu skutečně roste. Z tohoto dílčího pozorování však ještě nelze usuzovat, že sledovanost roste po celou dobu od zveřejnění, nebo že je video obecně „čím dál populárnější“.

Z metodického hlediska je podstatné neoznačit youtuberovo tvrzení ihned za „lež“. V této fázi totiž z předložených dat skutečně nevíme, co se dělo před 43. hodinou. Vhodnější je vést žáky k formulaci, že zobrazená data nejsou dostatečná pro tak obecný závěr. Tím se rozvíjí důležitá dovednost: kromě kontroly toho, co data ukazují, přemýšlet také nad tím, co z nich naopak zjistit nemůžeme.

Úloha 2 (PL 27)

Úloha 2 nabízí žákům širší kontext – vývoj počtu zhlédnutí za hodinu od počátku sledovaného období až do 48. hodiny. Teprve nyní mohou posoudit, nakolik byl výřez zveřejněný youtuberem reprezentativní pro celkový vývoj sledovanosti. Doporučujeme nejprve nechat žáky vyhledat v dlouhodobém grafu právě úsek 43.–48. hodiny a porovnat jej s grafem z první úlohy. Tím se velmi názorně ukáže, že první graf obsahoval pravdivá data – pouze byla vybrána z mnohem delšího průběhu. Žáci mohou tento úsek například barevně označit. V celkovém kontextu pak vidí, že jde o období mírného opětovného růstu po předchozím výrazném poklesu sledovanosti.

Tato úloha tak opět rozšiřuje představu o možnostech manipulace při zobrazování dat. Vedle měřítka a podoby grafu k nim přibývá i výběr toho, která data nezobrazit a která naopak zdůraznit. Při interpretaci dat je proto důležité ptát se nejen na to, co vidíme, ale také na to, jaká data nám zobrazena nejsou.

Pracovní list 28

Cíl:

- Žák při posuzování informací získaných z grafu nebo diagramu vychází nejen z jeho vizuální stránky, ale především zaměřuje pozornost na interpretaci dat ze zobrazených hodnot, měřítka a dalších informací.

Po dokončení série věnované datové kamufláži je vhodné tuto uvolněnou úlohu TIMSS využít jako výstupní. Žák zde již nedostává návod, na jaký způsob zakreslení se má zaměřit, ale musí sám rozpoznat, co je při porovnání dvou diagramů podstatné. Úloha tak může sloužit k ověření, zda dokáže přenést zkušenosti z předchozích pracovních listů do nové situace. Proto ji doporučujeme zadat samostatně, bez předchozí společné analýzy diagramů a bez upozornění na měřítko os. Smyslem není zjistit pouze to, zda žák umí odečíst konkrétní hodnoty, ale především zda již při práci s datovým zobrazením automaticky kontroluje způsob, jakým jsou data prezentována, a nevychází jen z výšky sloupců.

Při vyhodnocení je vhodné sledovat nejen správnost odpovědi, ale také její zdůvodnění. Za plné porozumění lze považovat situaci, kdy žák rozpozná, že oba diagramy používají rozdílné měřítko svislé osy, porovná skutečné hodnoty únorových srážek a vysvětlí, proč pouhé vizuální porovnání výšky sloupců vedlo Julii k chybnému závěru. Odpovědi žáků mohou zároveň učiteli posloužit jako rychlá diagnostika porozumění celé problematice.